

確率システムの状態推定入門

東京工業大学大学院
機械制御システム専攻

山北 昌毅

内容

- ・ 最小分散推定値
- ・ Kalman Filter
 - 線形カルマンフィルタ
 - 拡張カルマンフィルタ
 - Unscented Kalman Filter (UKF)
- ・ 例題を用いた状態推定比較
 - UKFとRHCの併用例
- ・ Kalman-Bucy Filter-UKBF
- ・ 状態拘束・非ガウス性外乱に対する対
 - 混合ガウス分布
 - アンサンブルカルマンフィルタ
- ・ まとめ

•期待値 \bar{x}

$$\bar{x} = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

•分散 σ_x^2

$$\sigma_x^2 = E\{(X - \bar{x})^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 p(x)dx$$

• k 次統計モーメント

$$E\{(X - \bar{x})^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \bar{x})^k p(x)dx$$

1次モーメント:平均

3次モーメント:歪度

2次モーメント:分散

4次モーメント:尖度

ガウス分布

• 1次元

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right)$$

• 平均: $E\{X\} = \bar{x}$

• 分散: $E\{(X - \bar{x})^2\} = \sigma^2$

• 奇数次モーメント: $E\{(X - \bar{x})^{2n+1}\} = 0$

• 偶数次モーメント: $E\{(X - \bar{x})^{2n}\} = (1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1))\sigma^{2n}$

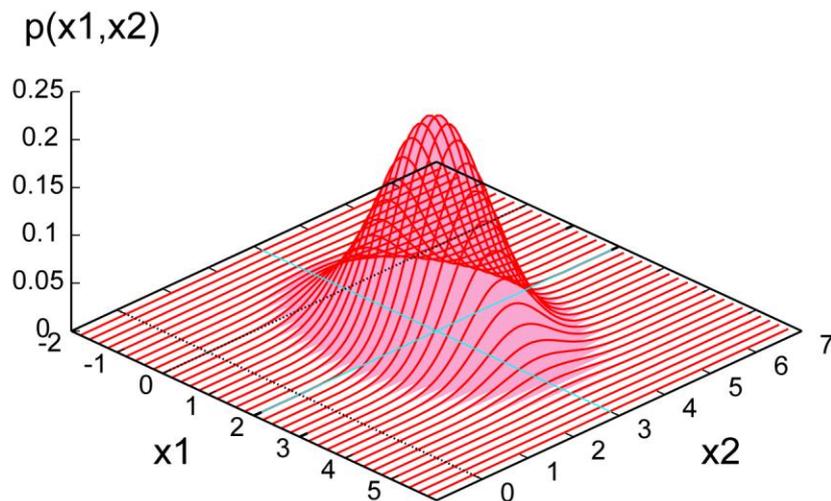
• 多次元

$$x \in R^n \quad \Sigma = E\left\{(X - \bar{x})(X - \bar{x})^T\right\}$$

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (X - \bar{x})^T \Sigma^{-1} (X - \bar{x})\right)$$

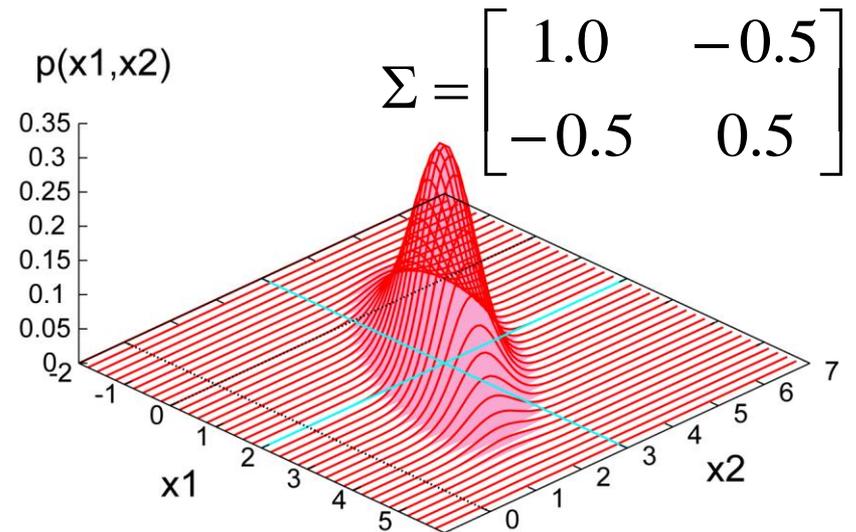
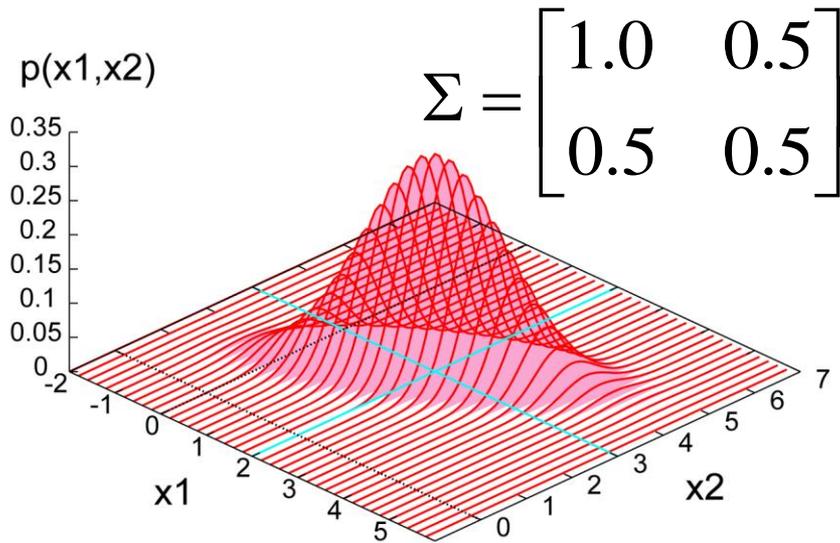
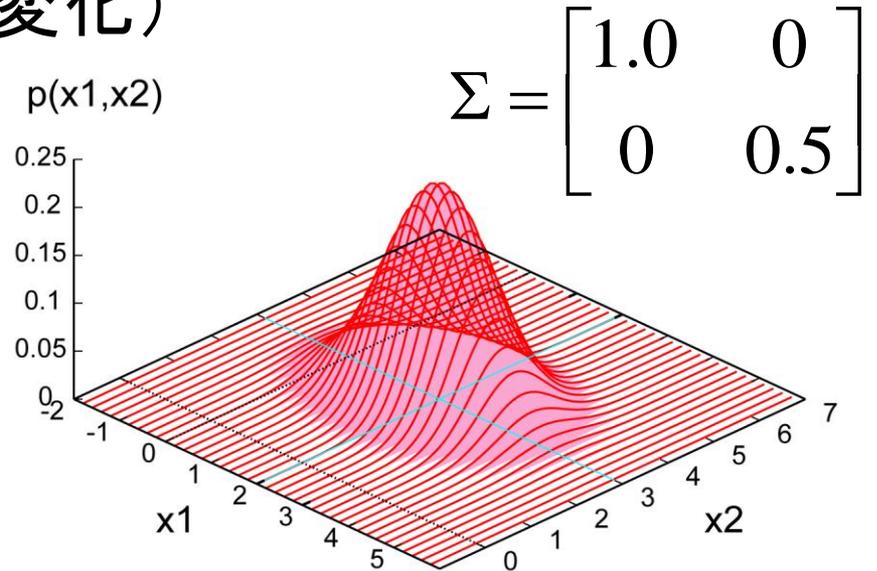
• 2次元

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 x_2} \\ \sigma_{x_1 x_2} & \sigma_{x_2}^2 \end{bmatrix}$$



•2次元分布(相関による変化)

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 x_2} \\ \sigma_{x_1 x_2} & \sigma_{x_2}^2 \end{bmatrix}$$



Fact

正規分布を持つ確率変数のAffine変換された確率変数の確率分布は正規分布となる。つまり、

x を正規性の確率変数として y を次の式で定義する

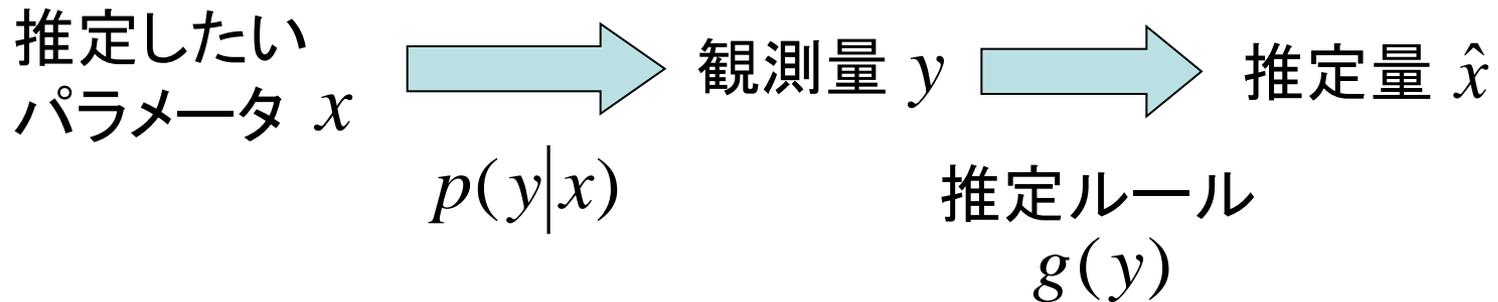
$$y = Ax + b \quad x \in R^n, y \in R^m, A \in R^{m \times n}, b \in R^m$$

y は正規性確率変数となり平均、分散は次の式で計算される

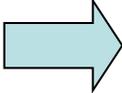
$$E\{y\} := \bar{y} = AE\{x\} + b = A\bar{x} + b$$

$$\begin{aligned} E\{(y - \bar{y})(y - \bar{y})^T\} &:= \Sigma_{yy} = E\{A(x - \bar{x})(x - \bar{x})^T A^T\} \\ &= AE\{(x - \bar{x})(x - \bar{x})^T\}A^T = A\Sigma A^T \end{aligned}$$

最小分散推定値



評価関数 $E\{\|x - \hat{x}\|^2\}$ を最小にする推定値

 条件付き期待値 $\hat{x} = E\{x|y\}$ と等価

(x の分布の種類によらず)

•証明

$$\begin{aligned} E\{f(X, Y)\} &= \iint f(x, y) p(x, y) dx dy, & p(x|y) &:= \frac{p(x, y)}{p(y)} \\ &= \iint f(x, y) p(x|y) dx p(y) dy \\ &= E\{E\{f(X, Y)|Y\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left(\|g(Y) - X\|^2\right) &= E\left(E\left(\|g(Y) - X\|^2|Y\right)\right) \\ &= E\left(E\left(\|g(Y) - E\{X|Y\} + E\{X|Y\} - X\|^2|Y\right)\right) \\ &= E\left(E\left(\left(g - \bar{x}_y + \bar{x}_y - X\right)^T \left(g - \bar{x}_y + \bar{x}_y - X\right)|Y\right)\right) \\ &= E\left(E\left(\|g - \bar{x}_y\|^2 + \|\bar{x}_y - X\|^2 + 2(g - \bar{x}_y)^T (\bar{x}_y - X)|Y\right)\right) \end{aligned}$$

続き

$$\begin{aligned} E\left(\|g(Y) - X\|^2\right) &= E\left(E\left(\|g(Y) - \bar{x}_y\|^2 + \|\bar{x}_y - X\|^2 \mid Y\right)\right) \\ &= E\left(E\left(\|g(Y) - \bar{x}_y\|^2 \mid Y\right) + E\left(\|\bar{x}_y - X\|^2 \mid Y\right)\right) \end{aligned}$$

$g(Y)$ と無関係

これが最小になるのは

$$g(Y) = \bar{x}_y \text{ の時。}$$

つまり、

$$g(Y) = E\{X|Y\} \text{ が最小分散推定値となる}$$

ここまでのまとめ

- 最小分散推定値は条件付期待値である。
- どうやって条件付期待値を求めるのか
- 条件付確率密度関数が得られても計算が困難
- ガウス分布を仮定すると容易に計算可能

ガウス分布の条件付期待値

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{yx} & \Sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\left\{(x - \bar{x})(x - \bar{x})^T\right\} & E\left\{(x - \bar{x})(y - \bar{y})^T\right\} \\ E\left\{(y - \bar{y})(x - \bar{x})^T\right\} & E\left\{(y - \bar{y})(y - \bar{y})^T\right\} \end{bmatrix}$$

$$A_0 \Sigma_{yy} = \Sigma_{xy} \quad A_0 = \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1}$$

$$\hat{x} = E\{x|y\} = \bar{x} + A_0(y - \bar{y})$$

$$E\left\{[x - E\{x|y\}][x - E\{x|y\}]^T | y\right\} = \Sigma_{xx} - A_0 \Sigma_{yx}$$

$$\Sigma_{xy}^T = \Sigma_{yy}^T A_0^T \quad \text{より上の共分散は } \Sigma_{xx} - A_0 \Sigma_{yy} A_0^T$$

注: ガウス分布でないとき線形最小分散推定値となる

$$\hat{x} = Ay + b$$

証明

[補題]

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12}^T & \Sigma_{22} \end{bmatrix}, \quad \Sigma^T = \Sigma$$

Σ_{22} is nonsingular, $\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}^T$ is nonsingular

$$1. \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} X^{-1} & -X^{-1}Y \\ -(X^{-1}Y)^T & Z^{-1} + Y^T X^{-1}Y \end{bmatrix}$$

$$X := \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}^T$$

$$Y := \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}$$

$$Z = \Sigma_{22}$$

$$2. \det(\Sigma) = \det(X) \det(Z)$$

(証明)

$$\Sigma = \begin{bmatrix} I_n & \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}^T & 0 \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

条件付確率密度関数

$$p(X) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det(\Sigma))^{1/2}} \text{Exp}\left(-\frac{1}{2} (X - \mu)^T \Sigma^{-1} (X - \mu)\right)$$

$$X := [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_n]^T$$

$$\int \text{Exp}\left(-\frac{1}{2} (\xi - \mu)^T \Sigma^{-1} (\xi - \mu)\right) d\xi = (2\pi)^{n/2} (\det(\Sigma))^{1/2}$$

$$p\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}\right) = p(X_1, X_2)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{(n_1+n_2)/2} (\det(\Sigma))^{1/2}} \text{Exp}\left(-\frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}\right)^T \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12}^T & \Sigma_{22} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}\right)\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}\right)^T \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12}^T & \Sigma_{22} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X^{-1} & -X^{-1}Y \\ -(X^{-1}Y)^T & Z^{-1} + Y^T X^{-1}Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \end{bmatrix}$$

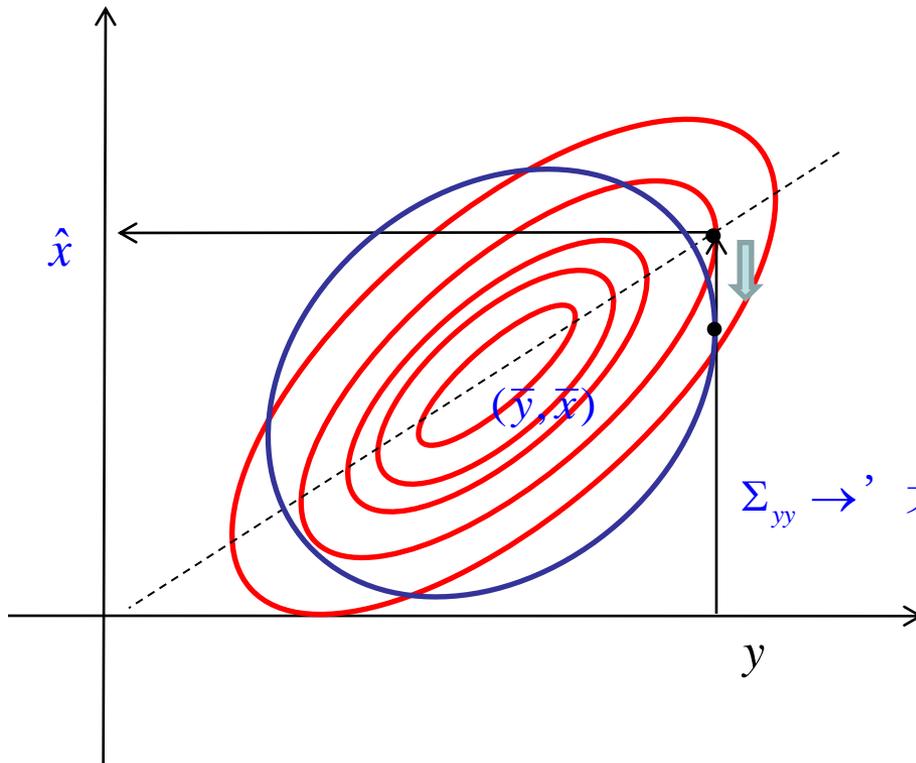
$$= (X_1 - \mu_1 - Y(X_2 - \mu_2))^T X^{-1} (X_1 - \mu_1 - Y(X_2 - \mu_2)) + (X_2 - \mu_2)^T Z^{-1} (X_2 - \mu_2) \quad 14$$

$$\begin{aligned}
p(X_2) &= \int p(\xi_1, X_2) d\xi_1 = \frac{1}{(2\pi)^{(n_1+n_2)/2} (\det(\Sigma))^{1/2}} \text{Exp}\left(-\frac{1}{2}(X_2 - \mu_2)^T Z^{-1}(X_2 - \mu_2)\right) \times \\
&\int \text{Exp}\left((X_1 - \mu_1 - Y(X_2 - \mu_2))^T X^{-1}(X_1 - \mu_1 - Y(X_2 - \mu_2))\right) d\xi_1 = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n_2/2} (\det(Z))^{1/2}} \text{Exp}\left(-\frac{1}{2}(X_2 - \mu_2)^T Z^{-1}(X_2 - \mu_2)\right) \\
p(X_1 | X_2) &= \frac{p(X_1, X_2)}{p(X_2)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n_1/2} (\det(X))^{1/2}} \text{Exp}\left(-\frac{1}{2}(X_1 - \mu_1 - Y(X_2 - \mu_2))^T X^{-1}(X_1 - \mu_1 - Y(X_2 - \mu_2))\right)
\end{aligned}$$

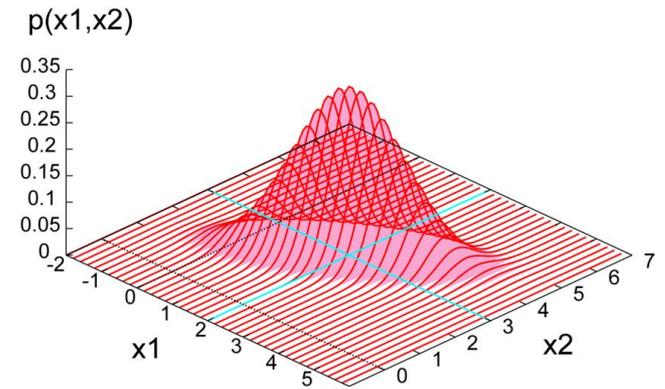
$$E\{X_1 | X_2\} = \mu_1 + Y(X_2 - \mu_2)$$

$$\text{Var}\{X_1 | X_2\} = X$$

確率密度関数のレベル集合との関係



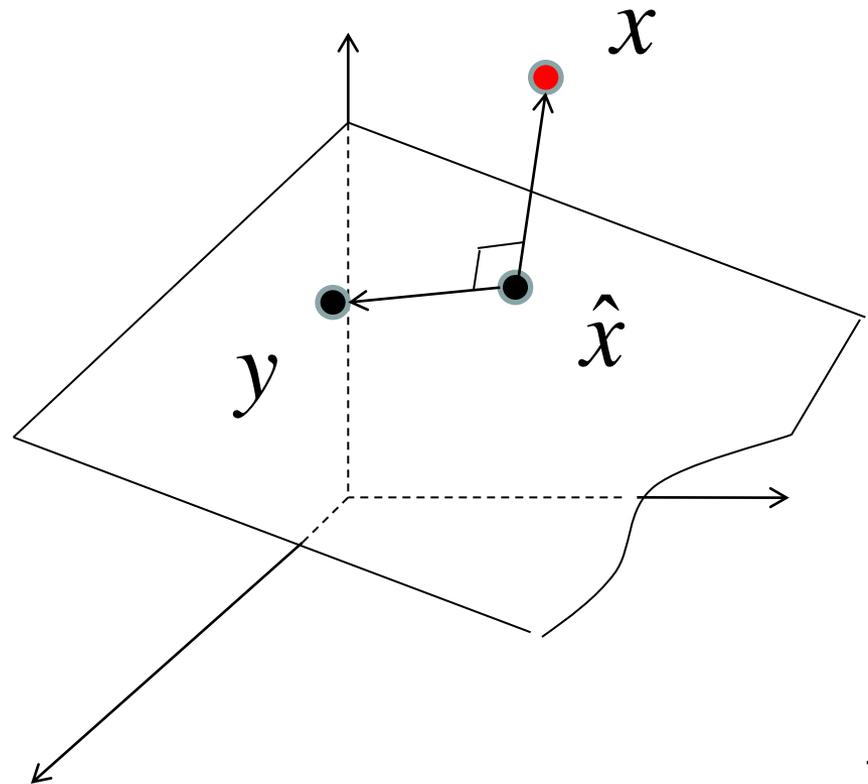
$\Sigma_{yy} \rightarrow$ '大きく' $\rightarrow \Sigma_{xy}$ の効果が小さく



拘束条件付ノルム最小化と直行条件

$$\text{Min } \|x - \hat{x}\| =: \|e\| \quad \text{s.t. } c^T x = d$$

$$\langle e, y - \hat{x} \rangle = 0$$



偏差と観測値の‘直交条件’

$$E\{(x - \hat{x})y^T\} = ?$$

$$\hat{x} = \bar{x} + Y(y - \bar{y}), \quad Y = \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}$$

$$\begin{aligned} E\{(x - \bar{x} - Y(y - \bar{y}))y^T\} &= E\{(x - \bar{x} - Y(y - \bar{y}))(y - \bar{y} + \bar{y})^T\} \\ &= \Sigma_{12} + 0 - Y\Sigma_{22} - Y0 = \Sigma_{12} - \Sigma_{12} = 0 \end{aligned}$$

逆に Y を知らなくとも、

$$\Sigma_{12} - Y\Sigma_{22} = 0$$

より、 $Y = \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}$ が出る

種々の手法の推定法の概略

1. カルマンフィルター (KF)

$p(x(0))$ をガウス分布に従うとして、解析的に条件付期待値を計算

2. 拡張カルマンフィルター (EKF)

誤差の分布がガウス分布に従うと近似して、解析的に条件付期待値を計算

3. UKF (無香料カルマンフィルター)

状態の分布を2次の統計量まで近似して、解析的に条件付期待値を計算

4. アンサンブルカルマンフィルター (EnKF)

初期状態分布に基づき代表点を生成し、各代表点の値を解析的に更新する。
条件付期待値は各点より集合平均的に数値計算する。

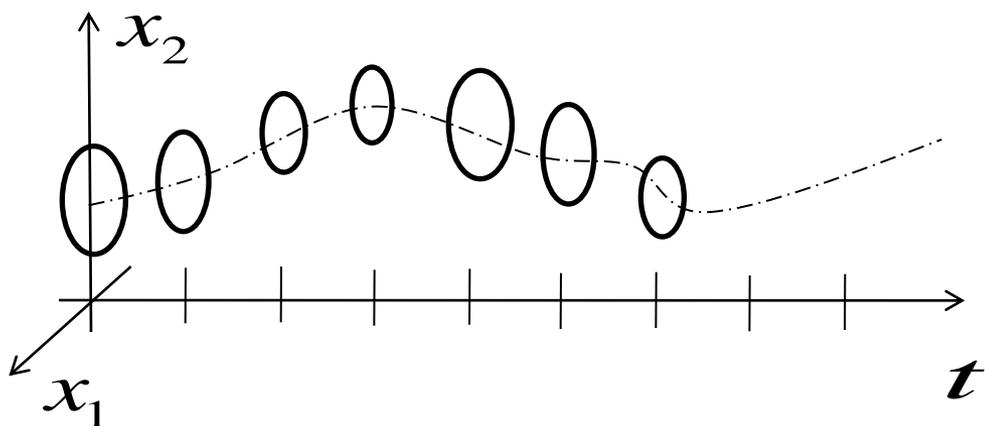
5. パーティクルフィルター (粒子フィルター)

分布を代表点の数の分布で近似し、条件付確率分布を解析的に近似する。

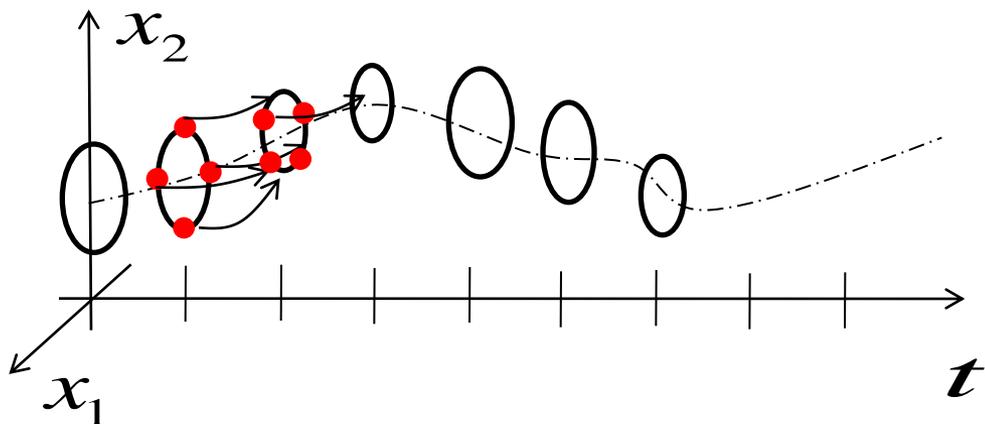
条件付確率分布に従って粒子を再サンプリングし、条件付期待値を集合平均で求める。

種々の手法のイメージ(1)

1. カルマンフィルター

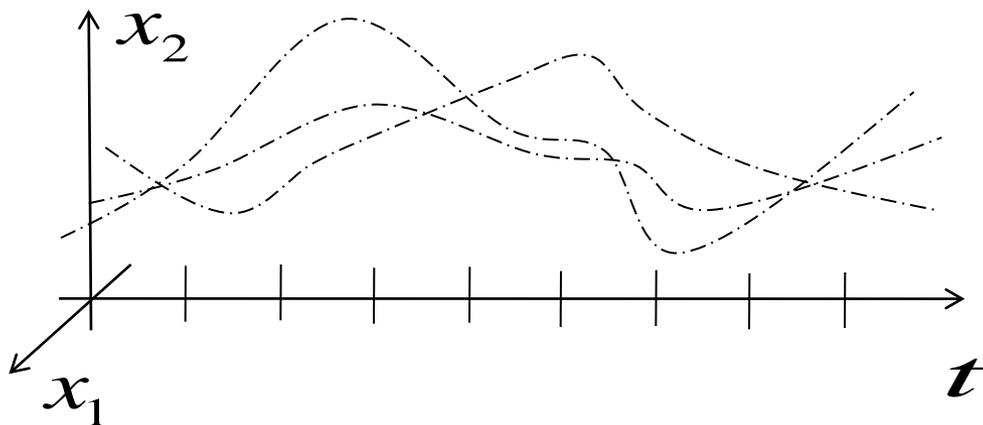


2. UKF

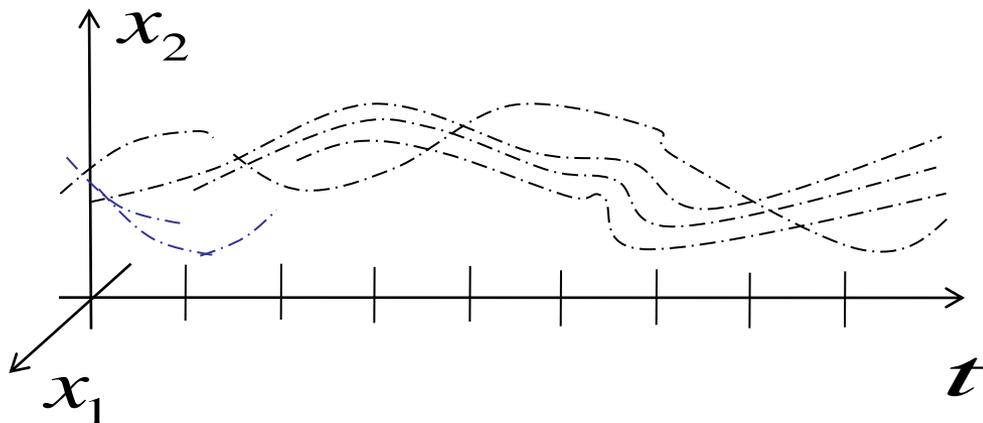


種々の手法のイメージ(2)

1. アンサンブルカルマンフィルター



2. パーティクルフィルター



パーティクルフィルター

$$\begin{cases} x_k = f(x_{k-1}, w_{k-1}), & x_k, w_{k-1} \in R^n, y_k, v_k \in R^p \\ y_k = h(x_k, v_k) & (\text{ただし、} v_k = h^{-1}(x_k, y_k) \text{が} \exists \text{存在}) \end{cases}$$

1. x_0 の分布に従って $x_0^{(i)} (i=1, \dots, N)$ を生成 ($k=0$)

2. 以下を繰り返す ($k \leftarrow k+1$)

(i) w_{k-1} の分布に従って $w_{k-1}^{(i)}$ を生成

(v) 条件付期待値は $x_k^{(i)}$ の単純平均

(ii) $x_k^{(i)} = f(x_{k-1}^{(i)}, w_{k-1}^{(i)})$ を計算 ($i=1, \dots, N$)

(iii) $p(y_k | x_k^{(i)})$ を次の式によって計算

$$dv_k = \frac{\partial h^{-1}(x_k, y_k)}{\partial y_k} dy_k \quad (dv_k^\wedge := dv_{k1} dv_{k2} \cdots dv_{kp}, dy_k^\wedge := dy_{k1} dy_{k2} \cdots dy_{kp})$$

$$1 = \int p(v_k) dv_k^\wedge = \int p(v_k) \left| \frac{\partial h^{-1}(x_k, y_k)}{\partial y_k} \right| dy_k^\wedge \text{より}$$

$$p(y_k | x_k^{(i)}) = p(h^{-1}(x_k, y_k)) \left| \frac{\partial h^{-1}(x_k, y_k)}{\partial y_k} \right| =: c_k^{(i)}$$

(iv) x_k の頻度 (確率) は代表点 (粒子) の数で表しているの、1つの粒子の

確率は全て $\frac{1}{N}$ である。よって $p(x_k^{(i)} | y_k)$ は次式で計算される。

$$p(x_k^{(i)} | y_k) = \frac{p(y_k | x_k^{(i)}) p(x_k^{(i)})}{\sum_{i=1}^N p(y_k | x_k^{(i)}) p(x_k^{(i)})} = \frac{c_k^{(i)} / N}{\sum_{i=1}^N c_k^{(i)} / N} = \frac{c_k^{(i)}}{\sum_{i=1}^N c_k^{(i)}}$$

この $p(x_k^{(i)} | y_k)$ に基づいて $x_k^{(i)}$ を再サンプリングする。

($x_k^{(i)}$ の分布は $p(x_k | y_k)$ の分布となる)

線形カルマンフィルタ

•対象モデル

$$x[k+1] = A[k]x[k] + v[k]$$

$$y[k] = C[k]x[k] + w[k]$$

$x[k] \in R^n$ 状態ベクトル

$y[k] \in R^l$ 観測ベクトル

$v[k] \in R^n$ 状態外乱ベクトル

$w[k] \in R^l$ 観測外乱ベクトル

$$E \left\{ \begin{bmatrix} v[k] \\ w[k] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^T[k] & w^T[k] \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \delta[k]$$

•線形カルマンフィルタ

初期推定値 $\hat{x}_{0|0}$ とその予測誤差共分散 $P_{0|0}$

1. カルマンゲインを計算

$$W_k = P_{k|k-1} C_k^T (C_k P_{k|k-1} C_k^T + R_k)^{-1}$$

2. 前回の予測推定値を観測値との誤差で修正

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + W_k (y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1})$$

3. 予測推定値を計算

$$\hat{x}_{k+1|k} = A_k \hat{x}_{k|k}$$

4. 推定誤差共分散行列を更新

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - W_k C_k P_{k|k-1}$$

$$P_{k+1|k} = A_k P_{k|k} A_k^T + Q_k$$

•証明

$$\begin{bmatrix} x[k+1] \\ y[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A[k] & I & 0 \\ C[k] & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[k] \\ v[k] \\ w[k] \end{bmatrix}$$

両辺の条件無しの期待値をとる。(k-1時刻までの情報による期待値)

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1|k-1} \\ \hat{y}_{k|k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A[k]\hat{x}_{k|k-1} \\ C[k]\hat{x}_{k|k-1} \end{bmatrix}$$

誤差ベクトルの同時確率密度関数の分散は以下のように計算される

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}[k+1] \\ \tilde{y}[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A[k]\tilde{x}[k] + v[k] \\ C[k]\tilde{x}[k] + w[k] \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}[k] := x[k] - x_{k|k-1}, \tilde{y}[k] := y[k] - C[k]x_{k|k-1} \\ P_{k|k-1} := E\{\tilde{x}[k]\tilde{x}^T[k]\} \\ A[k] \equiv A_k \end{array} \right.$$

$$E \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{x}[k+1]\tilde{x}^T[k+1] & \tilde{x}[k+1]\tilde{y}^T[k] \\ \tilde{y}[k]\tilde{x}^T[k+1] & \tilde{y}[k]\tilde{y}^T[k] \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} A_k P_{k|k-1} A_k^T + Q & A_k P_{k|k-1} C_k^T \\ C_k P_{k|k-1} A^T & C_k P_{k|k-1} C_k^T + R \end{bmatrix}$$

ただし、 $x_{i|j}, P_{i|j}$ はそれぞれy[j]まで観測された
ときのx[i]の条件付期待値及び条件付分散である

(x ← $\tilde{x}[k+1]$)
y ← $\tilde{y}[k]$)と考える

ここで $X=x[k+1]$, $Y=y[k]$ と考えると $\hat{x}=\hat{x}_{k+1|k}$ は

$$\bar{x}=A_k \hat{x}_{k|k-1}$$

$$\bar{y}=C_k \hat{x}_{k|k-1}$$

$$\Sigma_{yy} = C_k P_{k|k-1} C_k^T + R$$

$$\Sigma_{xy} = A_k P_{k|k-1} C_k^T$$

として

$$z = \bar{x} + \Sigma_{xy} \Sigma_{yy}^{-1} (y[k] - \bar{y})$$

$$= A_k (\hat{x}_{k|k-1} + P_{k|k-1} C_k^T (C_k P_{k|k-1} C_k^T + R)^{-1} (y[k] - \bar{y}))$$

$$\Sigma_{zz} = A_k P_{k|k-1} A_k^T + Q - A_k P_{k|k-1} C_k^T (C_k P_{k|k-1} C_k^T + R)^{-1} C_k P_{k|k-1} A_k^T$$

$$= A_k (P_{k|k-1} - P_{k|k-1} C_k^T (C_k P_{k|k-1} C_k^T + R)^{-1} C_k P_{k|k-1}) A_k^T + Q_k$$

$$= A_k (P_{k|k-1} - W_k C_k P_{k|k-1}) A_k^T + Q_k$$

従ってゲインを次のように定義し、

$$W_k = P_{k|k-1} C_k^T (C_k P_{k|k-1} C_k^T + R_k)^{-1}$$

$\hat{x}_{k|k}$ 、 $P_{k|k}$ を次の式で定義すると、

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + W_k (y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1})$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - W_k C_k P_{k|k-1}$$

最適な推定値は次式で与えられる

$$\hat{x}_{k+1|k} = A_k \hat{x}_{k|k}$$

$$P_{k+1|k} = A_k P_{k|k} A_k^T + Q_k$$

線形カルマンフィルタ(入力あり)

•対象モデル

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k + v_k \\ y_k &= C_k x_k + w_k\end{aligned} \quad u_k \in R^m \text{ 入力ベクトル}$$

ほとんど同様に計算できる

$$\begin{aligned}W_k &= P_{k|k-1} C_k^T (C_k P_{k|k-1} C_k^T + R_k)^{-1} \\ \hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + W_k (y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1})\end{aligned}$$

$$\hat{x}_{k+1|k} = A_k \hat{x}_{k|k} + B_k u_k \quad (\text{条件なし期待値の計算})$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - W_k C_k P_{k|k-1}$$

$$P_{k+1|k} = A_k P_{k|k} A_k^T + Q_k$$

白色化フィルター(イノベーションプロセス)

元のシステム

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + v_k \\ y_k = C_k x_k + w_k \end{cases}$$

状態推定器

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + W_k (y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1})$$

$$\hat{x}_{k+1|k} = A_k \hat{x}_{k|k} + B_k u_k$$

$$= A_k (\hat{x}_{k|k-1} + W_k (y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1})) + B_k u_k = A_k \hat{x}_{k|k-1} + B_k u_k + A_k W_k (y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1})$$

$$\begin{cases} v_k := y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1} \\ K_k := A_k W_k \end{cases}$$

システムの別表現

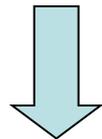
$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1|k} = A_k \hat{x}_{k|k-1} + B_k u_k + K_k v_k \\ y_k = C_k \hat{x}_{k|k-1} + v_k \end{cases}$$

A_k, B_k, C_k が一定の場合、 v_k が白色信号であることが示せる

ARモデルのパラメータ推定(1)

•3次のARモデルのパラメータ推定

$$y_k = a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + a_3 y_{k-3} + w_k$$


$$x_k = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]^T$$

•状態空間モデル

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} x_k$$

$$y_k = [y_{k-1} \quad y_{k-2} \quad y_{k-3}] x_k + w_k$$

ARモデルのパラメータ推定(2)

$$a_1 = 2.76$$

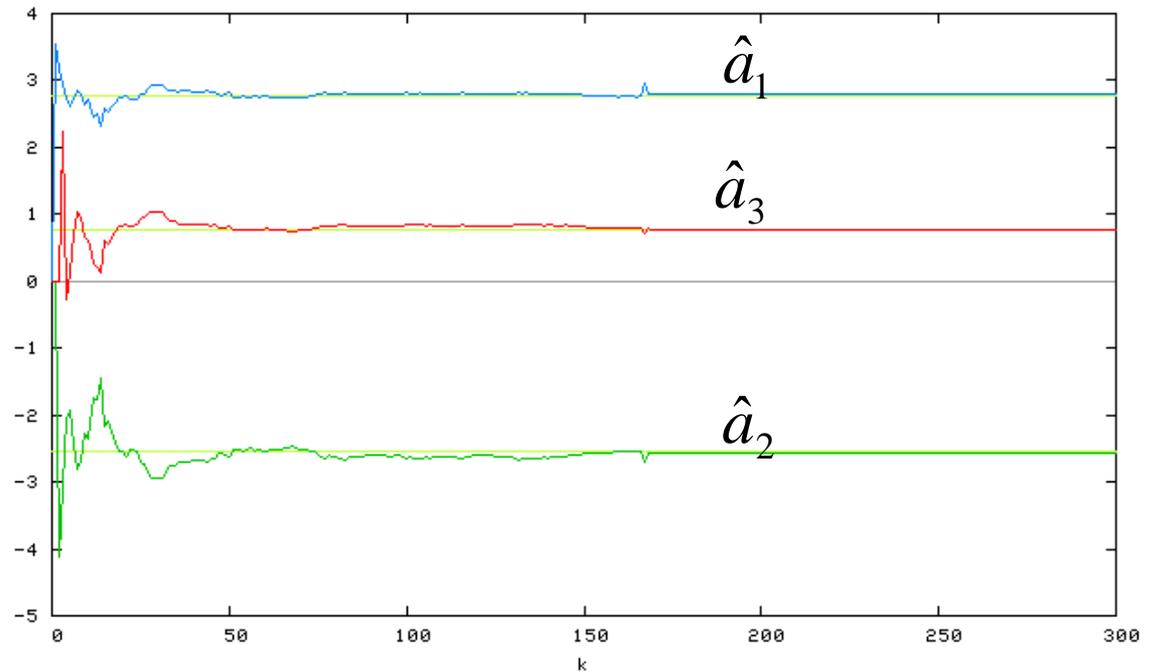
$$a_2 = -2.5329$$

$$a_3 = 0.778688$$

$$R = 1.0$$

$$P_0 = I$$

$$\hat{x}_0 = 0$$



観測回数

拡張カルマンフィルタ

$$\begin{cases} x[k+1] = f(x[k], u[k]) + v[k] \\ y[k] = h(x[k]) + w[k] \end{cases}$$

$$x[k+1] \approx f(\hat{x}[k], u[k]) + A[k](x[k] - \hat{x}[k]) + v[k]$$

$$y[k] \approx h(\hat{x}[k]) + C[k](x[k] - \hat{x}[k]) + w[k]$$

$$A[k] = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}[k]} \quad C[k] = \left. \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}[k]}$$

$$x[k+1] \approx f(\hat{x}[k], u[k]) + A[k](x[k] - \hat{x}[k]) + v[k]$$

$$\hat{x}[k+1] := f(\hat{x}[k], u[k])$$

$$\tilde{x}[k+1] = A[k]\tilde{x}[k] + v[k], \quad \tilde{x}[k] := x[k] - \hat{x}[k]$$

• 拡張カルマンフィルタの更新式

$$W[k] = A[k]P[k]C^T[k] \left(C[k]P[k]C^T[k] + R[k] \right)^{-1}$$
$$\hat{x}[k+1] = f(\hat{x}[k], u[k]) + W[k] \left(y[k] - h(\hat{x}[k], u[k]) \right)$$
$$P[k+1] = A[k]P[k]A^T[k] - W[k] \left(C[k]P[k]C^T[k] + R[k] \right) W^T[k]$$

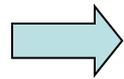
予測出力を用いた非線形カルマンフィルタ(1)

(UKFの考え方も同じ)

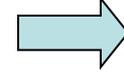
$p(x, y)$ の同時分布の考え方で予測出力を用いた場合

$$\begin{cases} x \leftarrow x[k+1] \\ y \leftarrow y[k+1] \end{cases} \quad \left(\text{今までは} \begin{cases} x \leftarrow x[k+1] \\ y \leftarrow y[k] \end{cases} \right)$$

\bar{x} と P_{xx} が既知



$$y = g(x)$$



\bar{y} と P_{yy} を推定する

$$\begin{aligned} x &:= x[k+1] \\ \bar{x} &:= \hat{x}[k+1|k] = E\{x[k+1]\} = E\{f(x[k], k, v[k])\} \\ P_{xx} &:= P[k+1|k] \\ &= E\{(x[k+1] - \hat{x}[k+1|k])(x[k+1] - \hat{x}[k+1|k])^T\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &:= y[k+1] \\ \bar{y} &:= \hat{y}[k+1|k] = E\{y[k+1]\} \\ P_{yy} &:= E\{(y[k+1] - \hat{y}[k+1|k])(y[k+1] - \hat{y}[k+1|k])^T\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[k+1] &= h(x[k+1], k+1, w[k+1]) \\ &=: g(x[k+1]) \end{aligned}$$

予測出力を用いた非線形カルマンフィルタ(2)

$$\begin{cases} x[k+1] = f(x[k], k, v[k]) \\ y[k+1] = h(x[k+1], k, w[k+1]) \end{cases}$$

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + W(k+1)v(k+1)$$

$$P(k+1|k+1) = P(k+1|k) - W(k+1)P_{vv}(k+1|k)W^T(k+1)$$

$$W(k+1) = P_{xy}(k+1|k)P_{vv}^{-1}(k+1|k)$$

$$v[k+1] = y[k+1] - y[k+1|k]$$

⇒ システムを逐次線形近似(EKF)

⇒ 統計モーメントを近似(UKF)

予測出力を用いた拡張カルマンフィルタ

$$\begin{cases} x[k+1] = f(x[k], u[k]) + v[k] \\ y[k+1] = h(x[k+1]) + w[k+1] \end{cases}$$

$$x[k+1] \approx f(\hat{x}[k], u[k]) + A[k](x[k] - \hat{x}[k]) + v[k]$$

$$\begin{aligned} y[k+1] &\approx h(f(\hat{x}[k], u[k]) + A[k](x[k] - \hat{x}[k]) + v[k]) + w[k+1] \\ &\approx h(f(\hat{x}[k], u[k])) + C[k+1]A[k](x[k] - \hat{x}[k]) + w[k+1] + C[k+1]v[k] \end{aligned}$$

$$A[k] = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}[k]} \quad C[k+1] = \left. \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right|_{x=f(\hat{x}[k], u[k])}$$

等価外乱

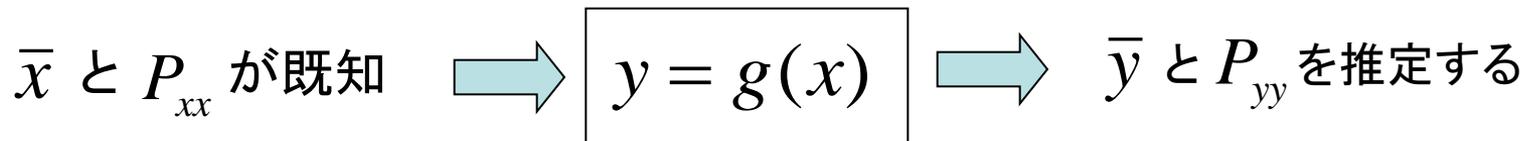
Unscented Kalman Filter (UKF)

• 拡張カルマンフィルタの問題点

- 線形近似する際にヤコビアンを計算しなければならない
(不連続なシステム、Hard Nonlinearity)
- 推定値にバイアスが乗ることがある (平均値の変換は変換後の平均値になると仮定している)
- 発散することもある

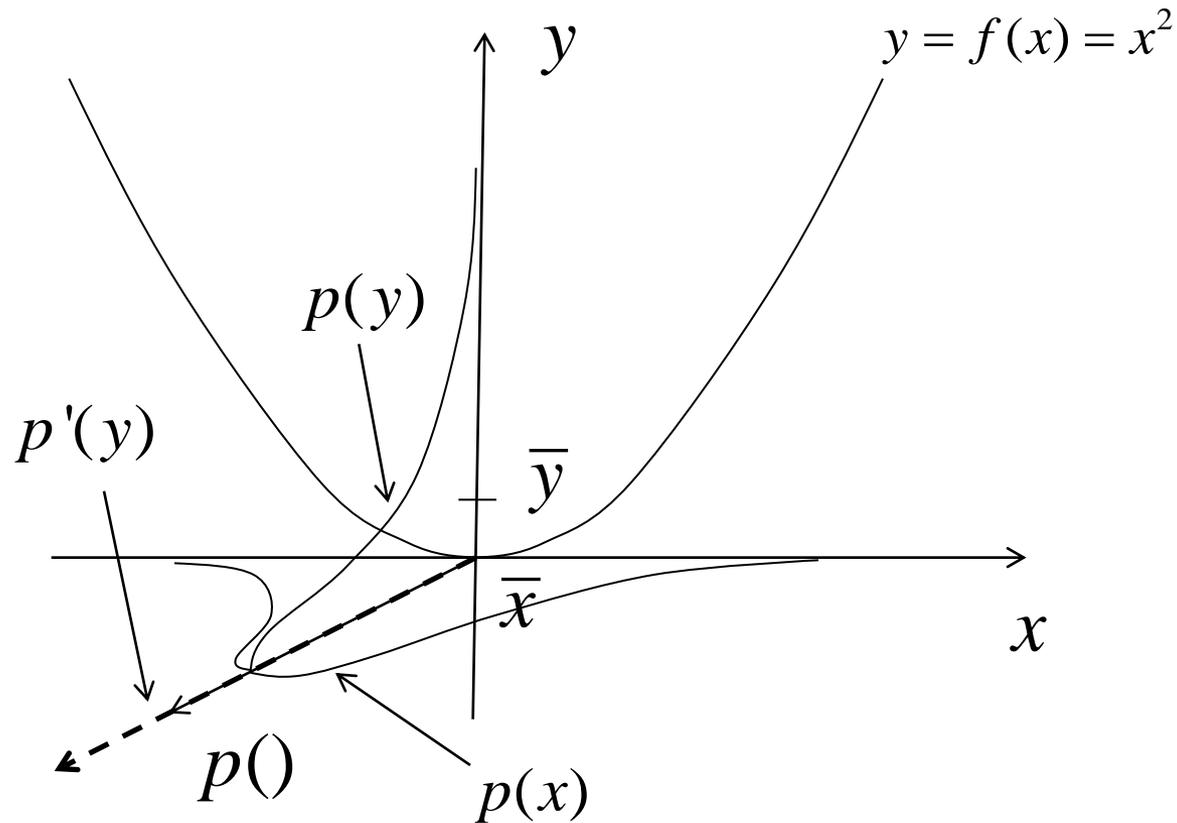
システムを近似するより統計量を近似するほうが容易

数カ所のサンプル点 (Sigma Points) を選び、集合平均的に統計量を近似する



Unscented Transformation
(U変換)

拡張カルマンフィルターの問題点



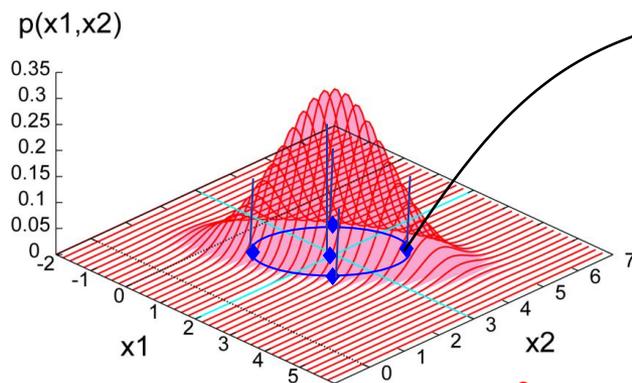
Sigma Pointsの考え方

$x \in R^n$ を平均値 \bar{x} 、分散行列 Σ_{xx} の確率変数ベクトルとする

x に対して、**2n+1個**の代表点 χ_i ($i=0,1,\dots,2n$) を考えて、それぞれの

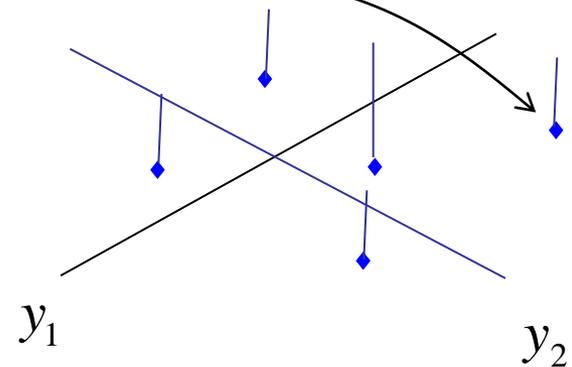
離散点の生起確率を W_i とする。ただし、 χ_i の集合的統計的性質は2次の

モーメントまで的一致させる $\sum_{i=0}^{2n} \chi_i W_i = \bar{x}$, $\sum_{i=0}^{2n} (\chi_i - \bar{x})(\chi_i - \bar{x})^T W_i = \Sigma_{xx}$



$$y = g(x)$$

$$\zeta_i = g(\chi_i)$$



$$\bar{y} \approx \hat{y} := \sum_{i=0}^{2n} \zeta_i W_i, \quad \Sigma_{yy} \approx \hat{\Sigma}_{yy} := \sum_{i=0}^{2n} (\zeta_i - \hat{y})(\zeta_i - \hat{y})^T W_i$$

Sigma Pointsを用いた推定の性質

1. \hat{y} は新しい平均値 \bar{y} を2次のorderまで近似

(EKFは1次のorderまで近似)

2. $\hat{\Sigma}_{yy}$ は Σ_{yy} を3次のorderまで近似(これはEKFと同じ)

3. κ はチューニングパラメータ

x がGaussianの場合 $n + \kappa = 3$ と選ぶのが良い

UKFの計算手順

1. 適切なサンプル点 (Sigma Points) を推定値 $\hat{x}(k|k)$ と共分散 $P(k|k)$ から選ぶ
2. Sigma Points を基に予測値 $\hat{x}(k+1|k)$ 、 $\hat{y}(k+1|k)$ を計算する
3. 予測共分散 $P_{xy}(k+1|k)$ 、 $P_{yy}(k+1|k)$ を計算する
4. カルマンゲイン $W(k+1)$ を計算する
5. 観測値 $y(k+1)$ が得られる
6. 推定値 $\hat{x}(k+1|k+1)$ と共分散 $P(k+1|k+1)$ を更新する

UKF: Sigma Points

$$X_0[k | k] = \hat{x}[k | k] \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$W_0 = \frac{\kappa}{n + \kappa}$$

$$\kappa \in \mathbb{R}$$

$$X_i[k | k] = \hat{x}[k | k] + \left(\sqrt{(n + \kappa) P[k | k]} \right)_i$$

$$W_i = \frac{1}{2(n + \kappa)}$$

i 番目の列ベクトル

$\sqrt{M} = N$ とすると

$M = NN^T$ である

$$X_{i+n}[k | k] = \hat{x}[k | k] - \left(\sqrt{(n + \kappa) P[k | k]} \right)_i$$

$$W_{i+n} = \frac{1}{2(n + \kappa)}$$

UKF: Sigma Pointsの性質

平均

$$\sum_{i=0}^{2n} W_i \mathcal{X}_i[k|k] = \hat{x}[k|k]$$

分散

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=0}^{2n} W_i (\mathcal{X}_i[k|k] - \hat{x}[k|k]) (\mathcal{X}_i[k|k] - \hat{x}[k|k])^T \\ &= \sum_{i=1}^n 2W_i (n + \kappa) \left(\sqrt{P(k|k)} \right)_i \left(\sqrt{P(k|k)} \right)_i^T \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{P(k|k)} \right)_i \left(\sqrt{P(k|k)} \right)_i^T \\ &= P(k|k) \end{aligned}$$

平均、分散は一致している点の集合

補足

$$P(k | k) = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^T$$

$$v_i = \left(\sqrt{P(k|k)} \right)_i$$

とすると

$$\begin{aligned} P(k | k) &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots, v_{n-1} & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_{n-1}^T \end{bmatrix} + v_n v_n^T = \sum_{j=1}^n v_j v_j^T \end{aligned}$$

UKF: 共分散行列の更新

1. Sigma Pointsを状態遷移関数で遷移させる

$$X_i[k+1|k] = f(X_i[k|k], u[k])$$

2. 遷移させたSigma Pointsの集合平均で予測平均を近似する

$$\hat{x}[k+1|k] = \sum_{i=0}^{2n} W_i X_i[k+1|k]$$

3. 遷移させたSigma Pointsの集合分散で予測分散を近似する

$$P[k+1|k] = \sum_{i=0}^{2n} W_i \left\{ X_i[k+1|k] - \hat{x}[k+1|k] \right\} \times \left\{ X_i[k+1|k] - \hat{x}[k+1|k] \right\}^T$$

4. Sigma Pointsを観測関数で遷移させる

$$\mathcal{Y}_i[k+1|k] = h(X_i[k+1|k], u[k])$$

5. 遷移させた点の集合平均で予測観測値を近似する

$$\hat{y}[k+1|k] = \sum_{i=0}^{2n} W_i \mathcal{Y}_i[k+1|k]$$

6. 遷移させたSigma Pointsの集合分散で予測分散を近似する

$$P_{yy}[k+1|k] = \sum_{i=0}^{2n} W_i \left\{ \mathcal{Y}_i[k+1|k] - \hat{y}[k+1|k] \right\} \times \left\{ \mathcal{Y}_i[k+1|k] - \hat{y}[k+1|k] \right\}^T$$

$$P_{xy}[k+1|k] = \sum_{i=0}^{2n} W_i \left\{ X_i[k+1|k] - \hat{x}[k+1|k] \right\} \times \left\{ \mathcal{Y}_i[k+1|k] - \hat{y}[k+1|k] \right\}^T$$

7. イノベーションの予測共分散を計算する

$$v[k+1] = y[k+1] - \hat{y}[k+1|k] = \tilde{y}[k+1|k] + w[k+1]$$

$$P_{vv}[k+1|k] = R[k+1] + P_{yy}[k+1|k]$$

8. カルマンゲインを計算する

$$W[k+1] = P_{xy}[k+1|k] P_{vv}^{-1}[k+1|k]$$

9. 観測値 $y[k+1]$ から推定値を更新する

$$\hat{x}[k+1|k+1] = \hat{x}[k+1|k] + W[k+1]v[k+1]$$

10. 予測誤差共分散を更新する

$$P[k+1|k+1] = P[k+1|k] - W[k+1]P_{vv}[k+1|k]W^T[k+1]$$

ノイズがアフィンでない場合

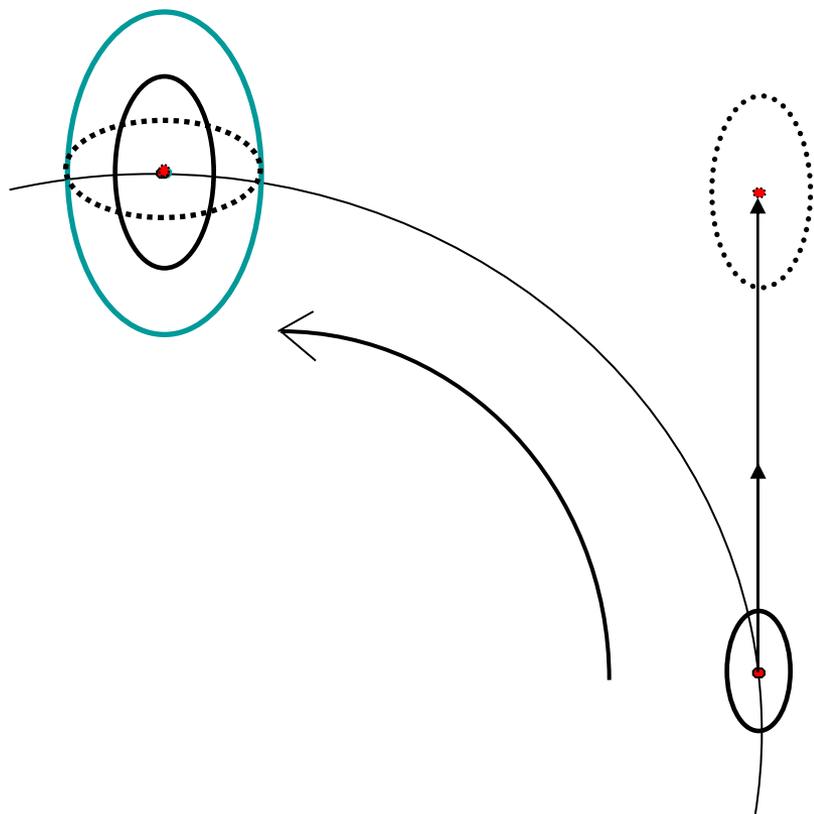
- 上記の説明では観測ノイズが状態変数と独立で、アフィンな形で加わっていた(ノイズの影響は分散行列の和として計算可能)
- ノイズがアフィンでない場合は状態とノイズの拡大した変数を考えてシグマポイントを生成して同様の計算を行う。(ただし、その分計算量が大きくなる。また、状態と両ノイズに相関がないので、平均の状態にノイズが加わった形での評価となる。)

$$\begin{cases} x[k+1] = f(x[k], v[k]) =: f_a(x_a[k]) \\ y[k+1] = h(f(x[k], v[k]), w[k+1]) =: h_a(x_a[k]) \end{cases}$$

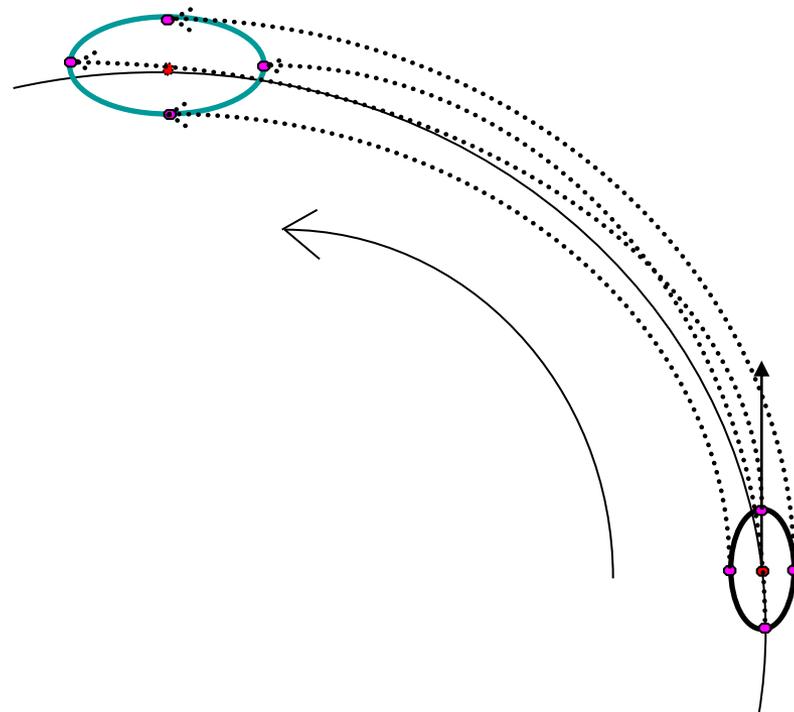
$$x_a[k] := \begin{bmatrix} x[k] \\ v[k] \\ w[k+1] \end{bmatrix} \in R^{2n+p}$$

$$\bar{x}_a = \begin{bmatrix} \hat{x}[k|k] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_{x_a x_a} = \begin{bmatrix} P[k|k] & & \\ & Q[k] & \\ & & R[k+1|k+1] \end{bmatrix}$$

共分散行列の予測

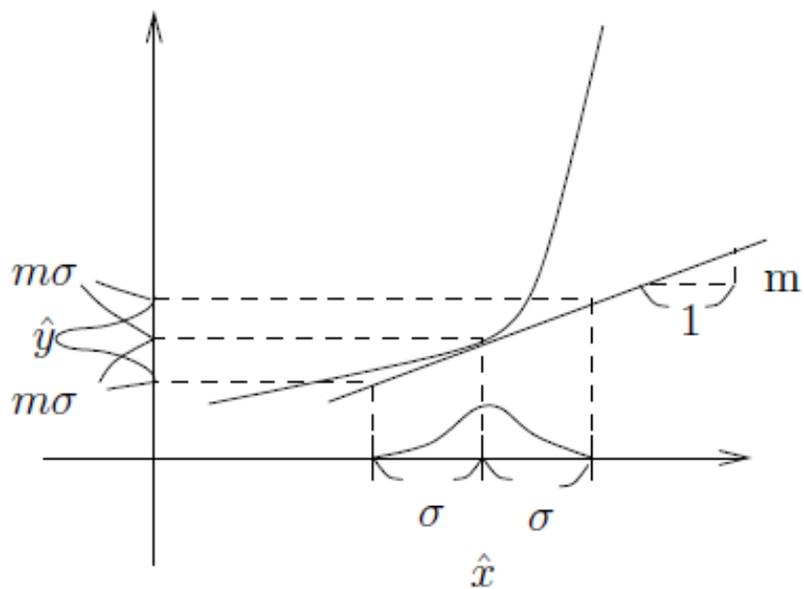


EKFによる共分散の予測

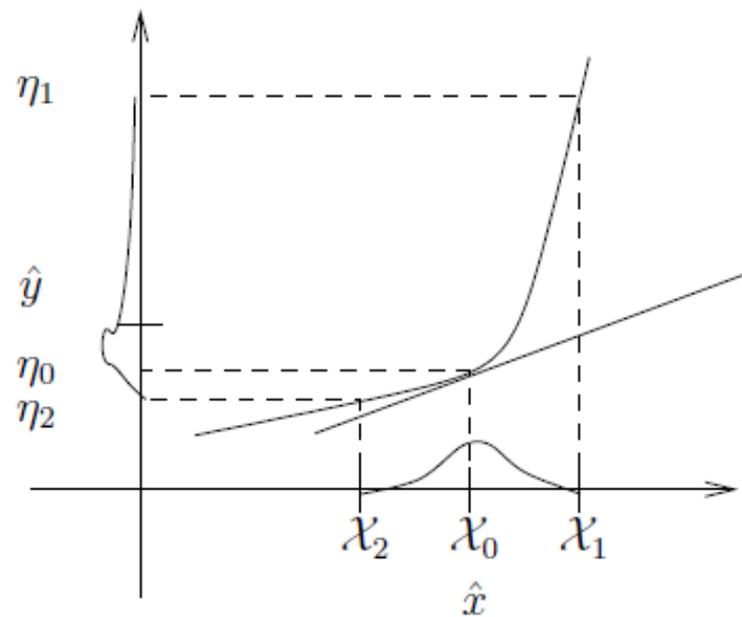


UKFによる共分散の予測

EKFとUKFの比較(1)

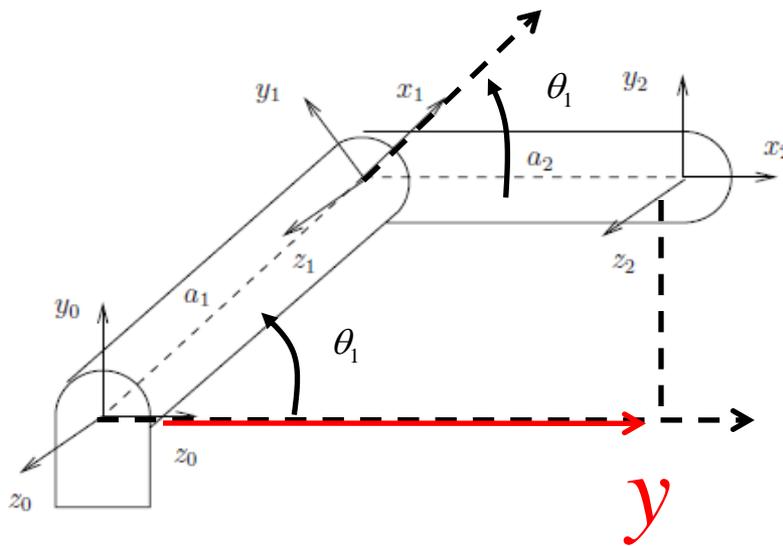


Linear Approximation



U Transformation

EKFとUKFの比較(1)

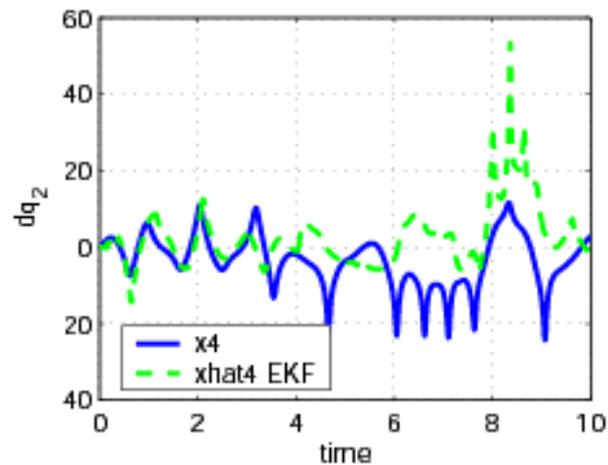
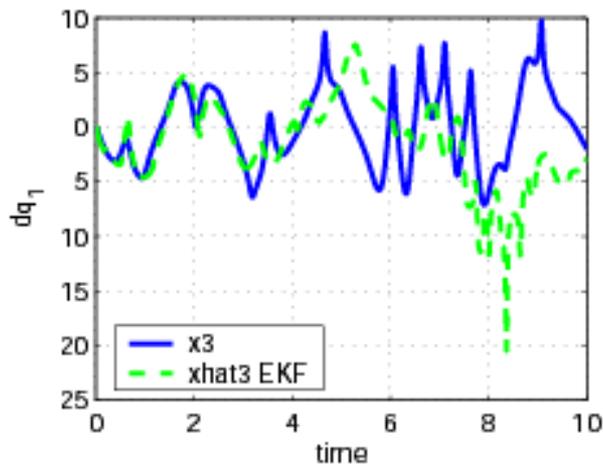
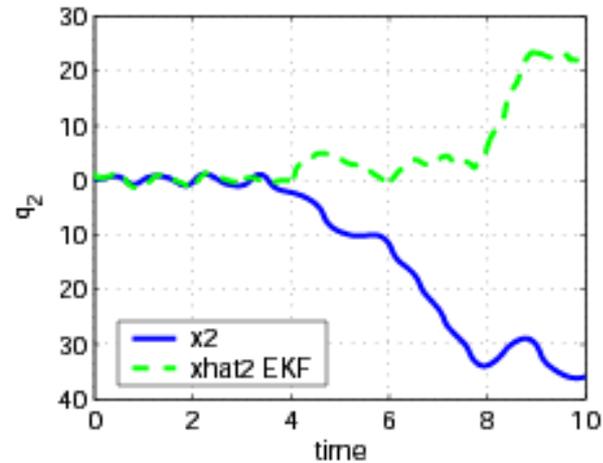
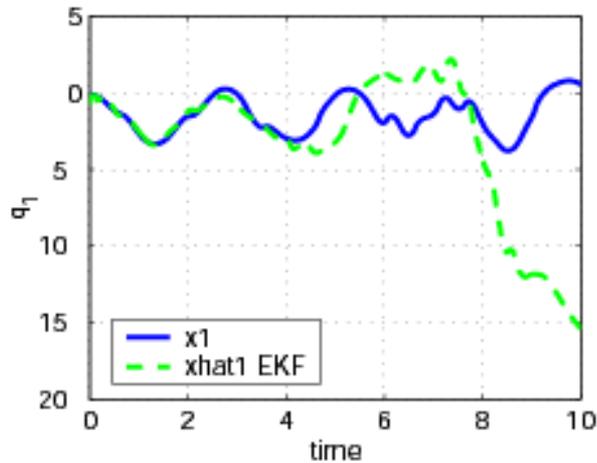


$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

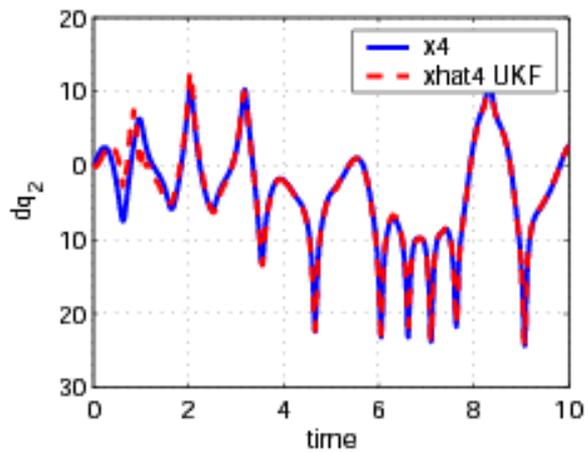
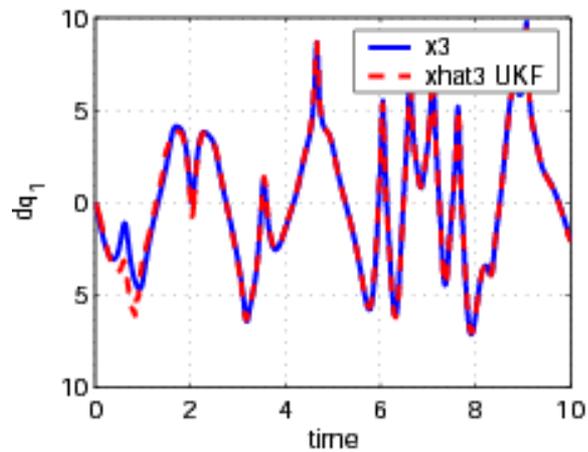
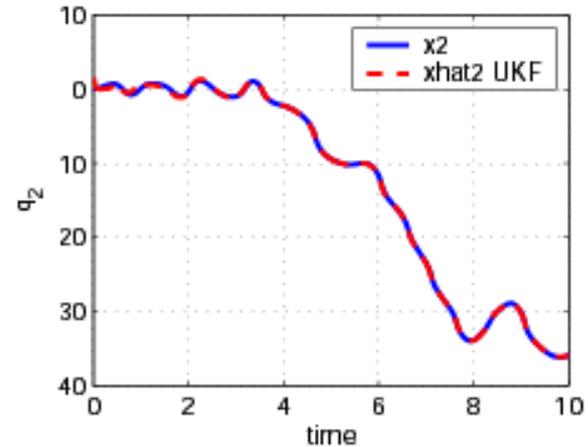
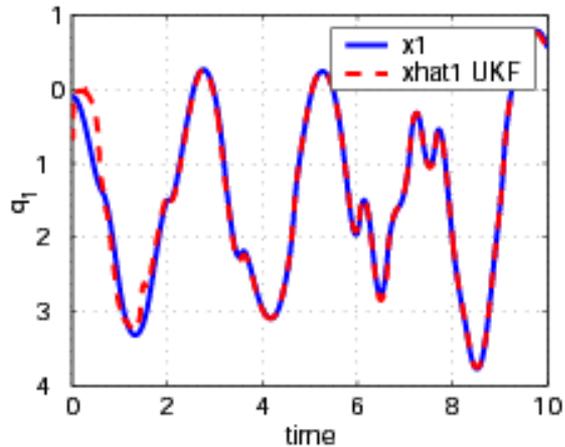
$$y = l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + n$$

平面2リンクマニピュレータ

EKFとUKFの比較(2)



EKFとUKFの比較(2)



状態とパラメータの同時推定(1)

- 状態方程式

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\gamma a x_1(t) + \gamma b + \gamma u(t)$$

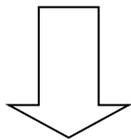
- 観測方程式

$$y(t) = x_1(t) + 4 \sin(x_1(t)) + w(t)$$

γ : 既知

a, b : 未知パラメータ

$y(t)$ を観測



状態 $x_1(t)$ と未知パラメータ a, b を

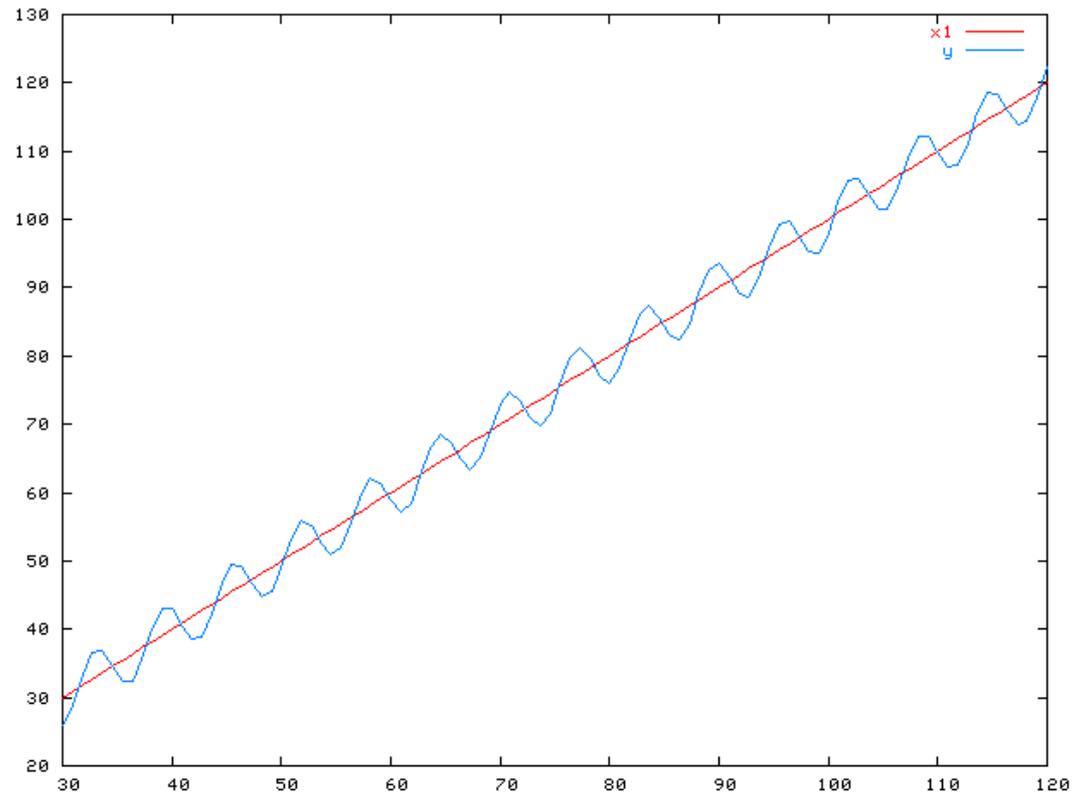
同時に推定する

状態とパラメータの同時推定(2)

観測方程式(モデル)

センサの脈動を
表したモデル

y



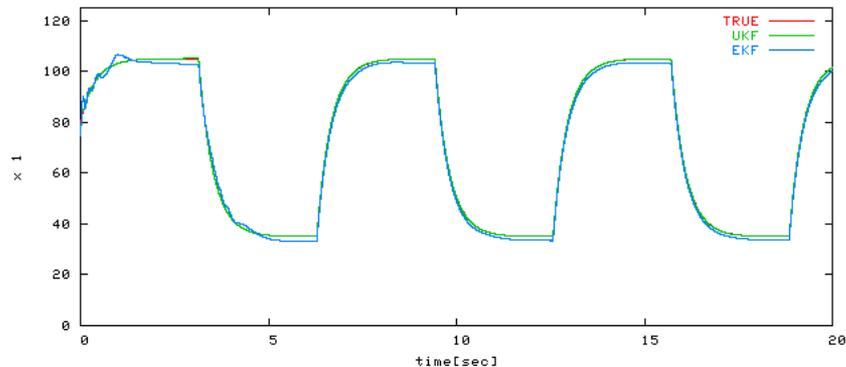
x_1

状態とパラメータの同時推定(3)

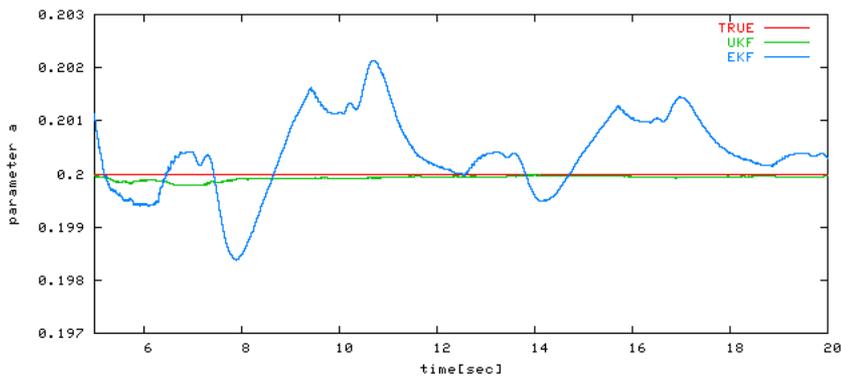
$$R = 10$$

$$Q = 0$$

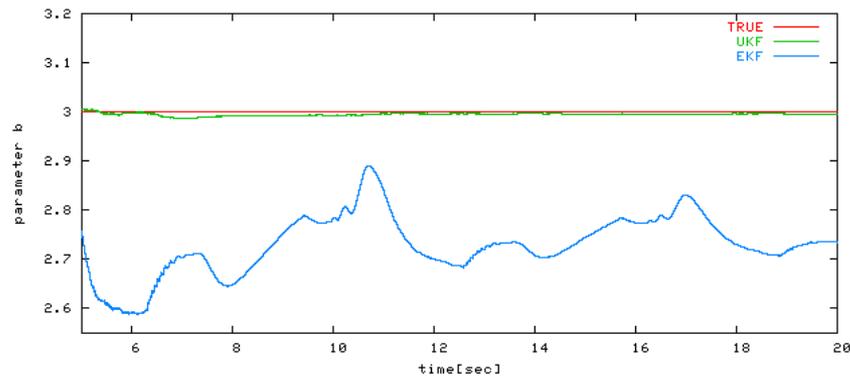
$$P_0 = \text{diag}(10 \quad 0.5 \quad 10)$$



\hat{x}_1



パラメータ \hat{a}



パラメータ \hat{b}

逐次最小二乘法

$$y[k] = \phi[k-1]^T \theta$$

出力

未知パラメータベクトル

出力、入力から計算される非線形関数ベクトル

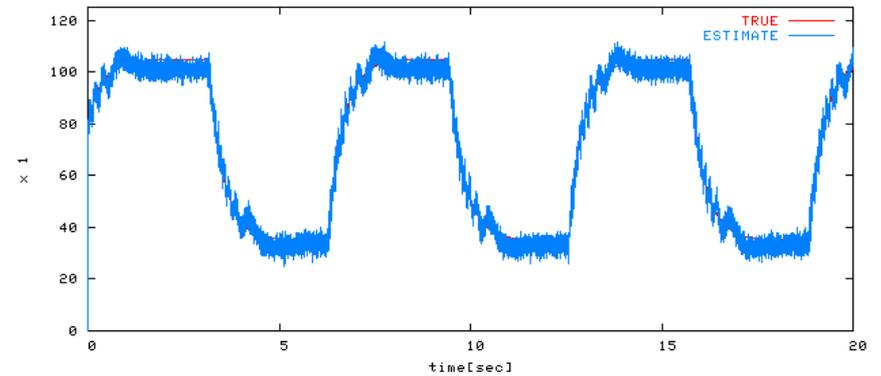
$$\hat{\theta}[k] = \hat{\theta}[k-1] + \frac{P[k-2]\phi[k-1]}{\phi[k-1]^T P[k-2]\phi[k-1]} \left(y[k] - \phi[k-1]^T \hat{\theta}[k-1] \right)$$

$$P[k-1] = P[k-2] - \frac{P[k-2]\phi[k-1]\phi^T[k-1]P[k-2]}{1 + \phi^T[k-1]P[k-2]\phi[k-1]}$$

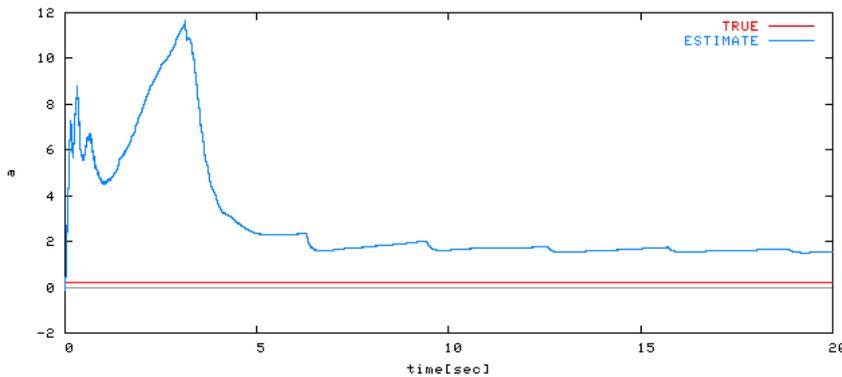
$$P[-1] > 0$$

シミュレーション結果

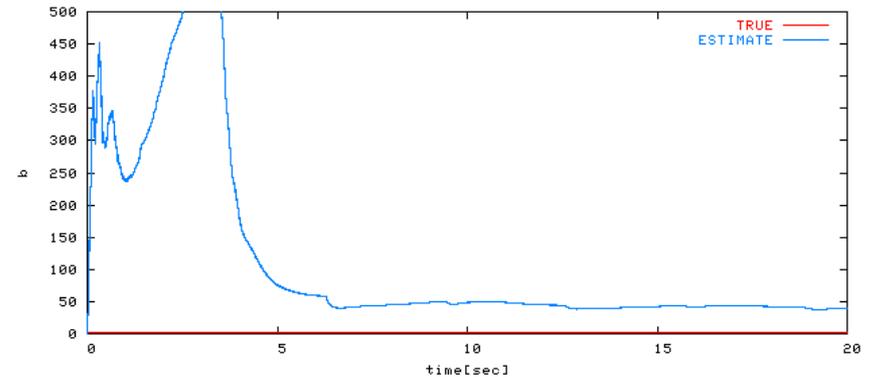
$$P[-1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



\hat{x}_1



パラメータ \hat{a}



パラメータ \hat{b}

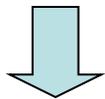
適応オブザーバ

$$\dot{x} = [a|\bar{A}]x + bu$$

\bar{A} : 既知の $n \times (n-1)$ 行列

a, b : 未知の $n \times 1$ ベクトル

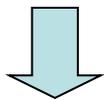
$$y = [1, 0, \dots, 0]x = x_1$$



$$\dot{x} = [-k|\bar{A}]x + [k + a]y + bu$$

$$y = h^T x = x_1$$

$k: [-k|\bar{A}]$ が漸近安定になるように決める



$$\dot{x} = Kx + gy + bu$$

$$y = h^T x = x_1$$

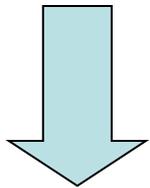
g : \hat{b} を推定する

適応オブザーバ

オブザーバ

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= K \hat{x} + \hat{g} y + \hat{b} u + v_1 + v_2 \\ \hat{y} &= h^T \hat{x} = \hat{x}_1\end{aligned}$$

$$\hat{a} = \frac{\alpha - \hat{g}_1}{\hat{b}_1}, \hat{b} = \frac{\hat{x}_2}{\hat{b}_1}$$



$$e = \hat{x} - x, \quad \phi = \hat{g} - g, \quad \psi = \hat{b} - b$$

誤差方程式

$$\begin{aligned}\dot{e} &= K e + \phi y + \psi u + v_1 + v_2 \\ e_1 &= \hat{x}_1 - x_1\end{aligned}$$

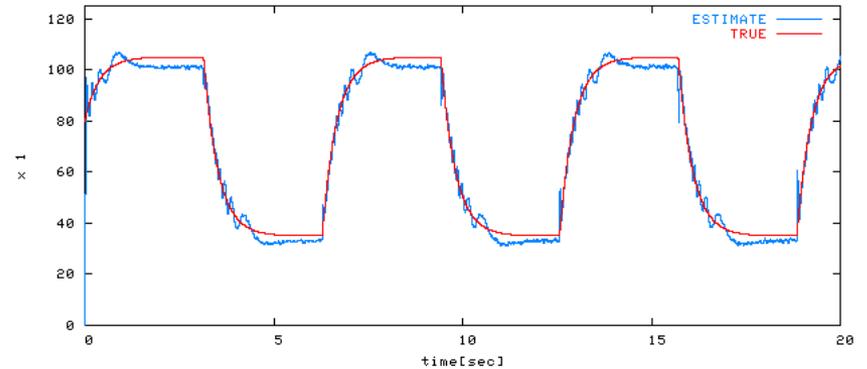
$e \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0, \psi \rightarrow 0$ となるように $\dot{\phi}, \dot{\psi}, v_1, v_2$ を決める

シミュレーション結果

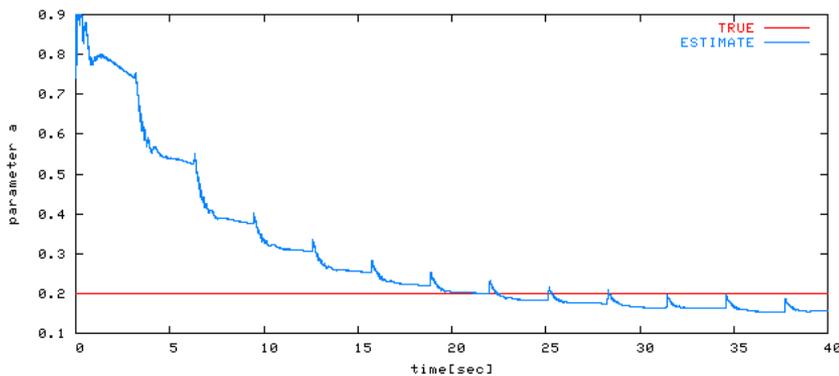
$$\alpha = 90$$

$$\beta = 51 \times 10^2$$

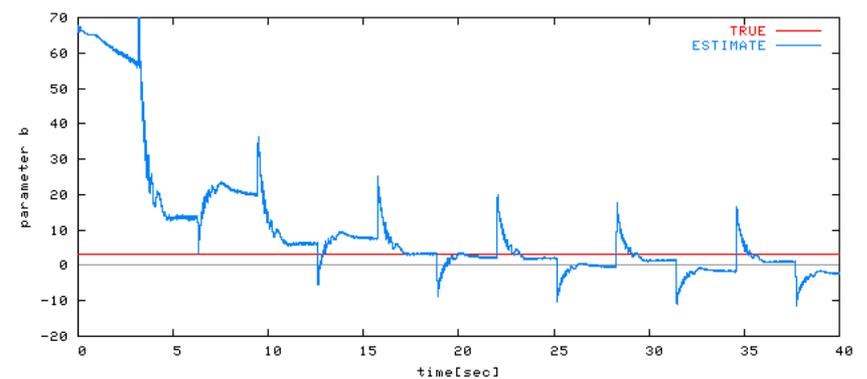
$$d_2 = 0.01\alpha$$



\hat{x}_1



パラメータ \hat{a}



パラメータ \hat{b}

UKFを用いたバックラッシュ系のモデル予測制御

- モデル予測制御

⇒ 制約条件を考慮したシステムティックな制御系設計

問題点

- 計算時間
- 状態の観測
- ロバストパフォーマンス

- バックラッシュ
 - 多くの機械システムに存在する
 - 制御性能の悪化、振動現象

- バックラッシュを考慮した制御は実用上非常に重要
 - 一般には、全ての状態が直接観測されない
 - バックラッシュを含むシステムの状態推定
 - 微分方程式はスムーズでない⇒UKFの適用
 - バックラッシュ補償
 - システムティックに最適制御系を実現したい
 - バックラッシュ系は非線形系(非線形最適制御フィードバック制御)
⇒非線形モデル予測制御の適用

モデル

状態方程式

$$\dot{x}_1 = x_3$$

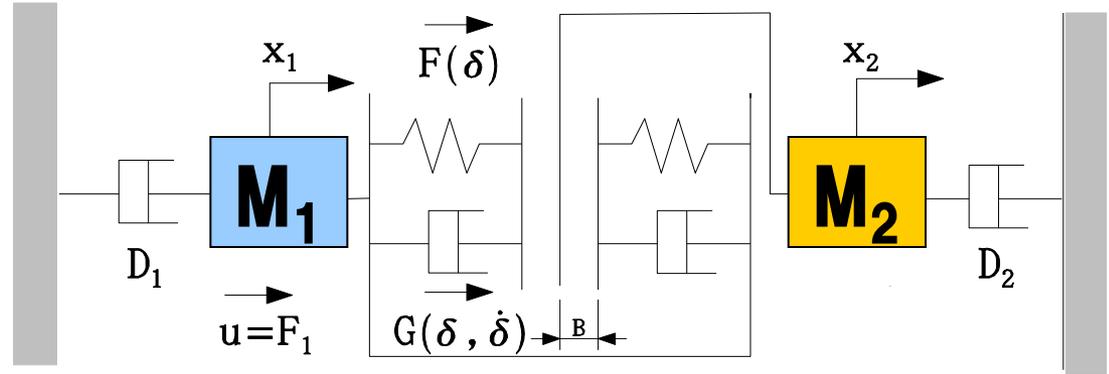
$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{M_1} (u - D_1 x_3 - \tau_c)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{M_2} (\tau_c - D_2 x_4)$$

観測方程式

$$y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + v \quad v: \text{センサノイズ}$$



$\tau_c = F(\delta) + G(\delta, \dot{\delta})$: 伝達トルク

$\delta = x_1 - x_2, \dot{\delta} = x_3 - x_4$

$F(\delta)$: バネ要素

$G(\delta, \dot{\delta})$: ダンパ要素

回転系と直動系の両方を表現可能

モデル

■ 伝達トルク(力)

$$\tau_c(\delta, \dot{\delta}) = \begin{cases} K(\delta - B) + D\dot{\delta} & \delta > B \\ 0 & |\delta| \leq B \\ K(\delta + B) + D\dot{\delta} & \delta < -B \end{cases}$$

δ : 相対距離

$2B > 0$: バックラッシュ幅

$K > 0$: バネ定数

$D > 0$: ダンパ定数

推定シミュレーション

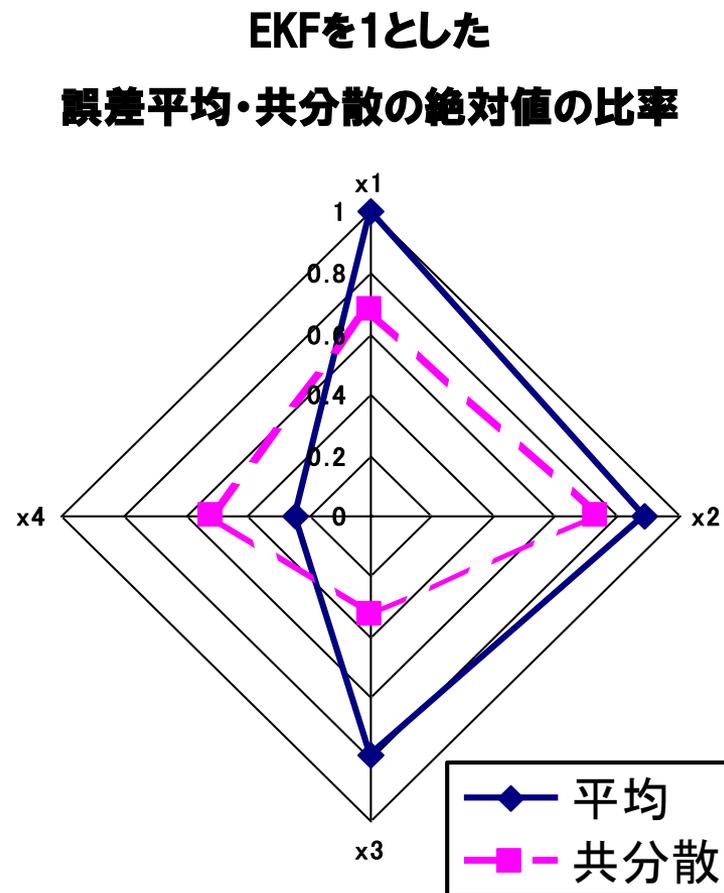
■ シミュレーション条件 (回転系)

観測値(ノイズ:標準偏差0.05の正規外乱)		
x_1	(rad)	駆動部位置
x_2	(rad)	被駆動部位置
u	[Nm]	入力(±100[Nm]の矩形波)
モデルパラメータ1		
$M_1 = 1.0$	[kgm ²]	モータの慣性モーメント
$M_2 = 2.0$	[kgm ²]	アームの慣性モーメント
$K = 1000$	[Nm/rad]	接触トルクのばね係数
$D = 10.0$	[Nms/rad]	接触トルクのダンパ係数
$D_1 = 0.1, D_2 = 0.1$	[Nms/rad]	シャフトの摩擦係数
$2B = 0.2$	(rad)	バックラッシュ幅

推定シミュレーション結果

- モデル誤差無し

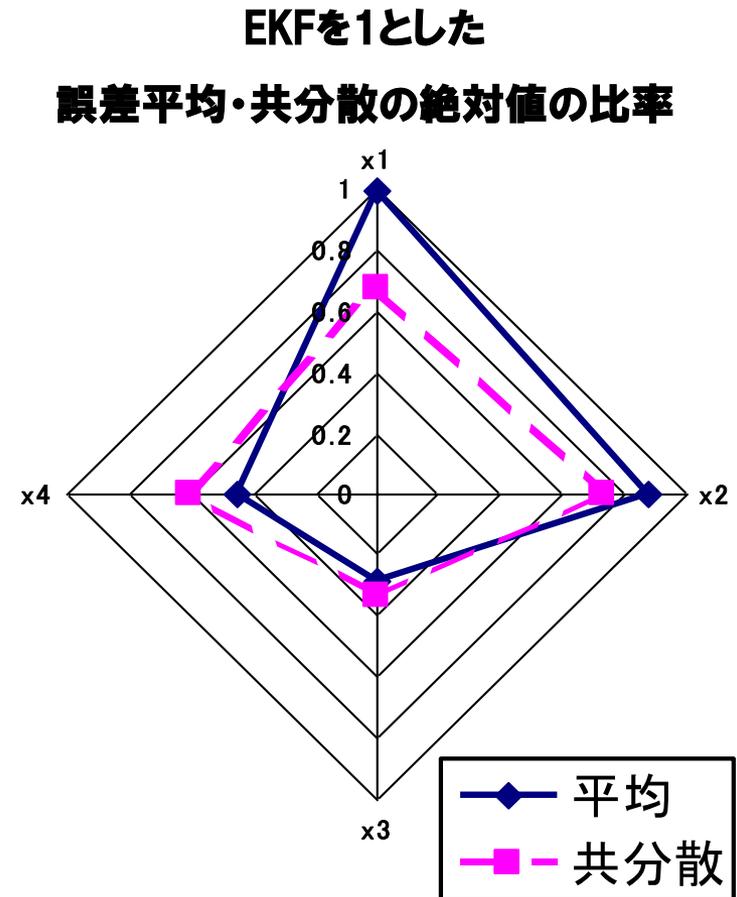
Offset	EKF	UKF
x_1	-9.74×10^{-4}	-9.72×10^{-3}
x_2	-5.01×10^{-4}	-4.44×10^{-3}
x_3	1.11×10^{-4}	-8.73×10^{-5}
x_4	4.11×10^{-3}	1.01×10^{-3}
Variance	EKF	UKF
x_1	2.86×10^{-4}	1.93×10^{-4}
x_2	1.12×10^{-4}	8.19×10^{-5}
x_3	1.29	4.20×10^{-1}
x_4	1.18×10^{-1}	6.01×10^{-2}



推定シミュレーション結果

- モデルのバックラッシュ幅に誤差が-10%

Offset	EKF	UKF
x_1	-7.44×10^{-4}	-7.37×10^{-4}
x_2	-1.44×10^{-4}	-1.26×10^{-4}
x_3	3.94×10^{-3}	1.12×10^{-3}
x_4	-8.96×10^{-3}	-4.05×10^{-3}
Variance	EKF	UKF
x_1	2.90×10^{-4}	1.95×10^{-4}
x_2	1.00×10^{-4}	7.30×10^{-5}
x_3	1.31	4.33×10^{-1}
x_4	1.19×10^{-1}	7.20×10^{-2}



制御則

- 評価関数

- 終端コスト関数・コスト関数: 参照軌道との二乗誤差

(ΔT で離散化したシステムを考える)

$$J^* = \phi(x_N^*(t)) + \sum_{i=0}^{N-1} L(x_i^*(t), v_i^*(t)) \Delta \tau$$

$$\phi := \frac{1}{2} (x_N - x_{rN})^T S_f (x_N - x_{rN})$$

$$L := \frac{1}{2} \{ (x - x_r)^T Q (x - x_r) + v^T R v \}$$

シミュレーション

- RHC

- 制御周期 10 [ms]
- 予測ステップ 20 (200[ms])
- 評価関数のパラメータはPSOなどを用いて探索

⇒ LQR制御と比較

- ただし、LQRでは2質点は常に接続状態であるとして、フィードバックゲインを求める(RHCの場合の重みとは異なる)
- RHCと同程度の立ち上がり時間の応答で比較
- 状態推定にはともにUKFを用いる
- 制御周期は1[ms]

制御則

- 参照軌道

- 目標状態までの軌道

$$x_r = [x_{r1} \ x_{r2} \ x_{r3} \ x_{r4} \ u_r]^T$$

- 駆動側の参照軌道

- 被駆動部に対し接触面で相対速度0

$$\begin{bmatrix} x_{r1} \\ x_{r3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + \text{sgn}(x_{r2} - x_2)B \\ x_4 \end{bmatrix}$$

- 被駆動部の参照軌道

- 被駆動部の目標位置をステップ関数で与える

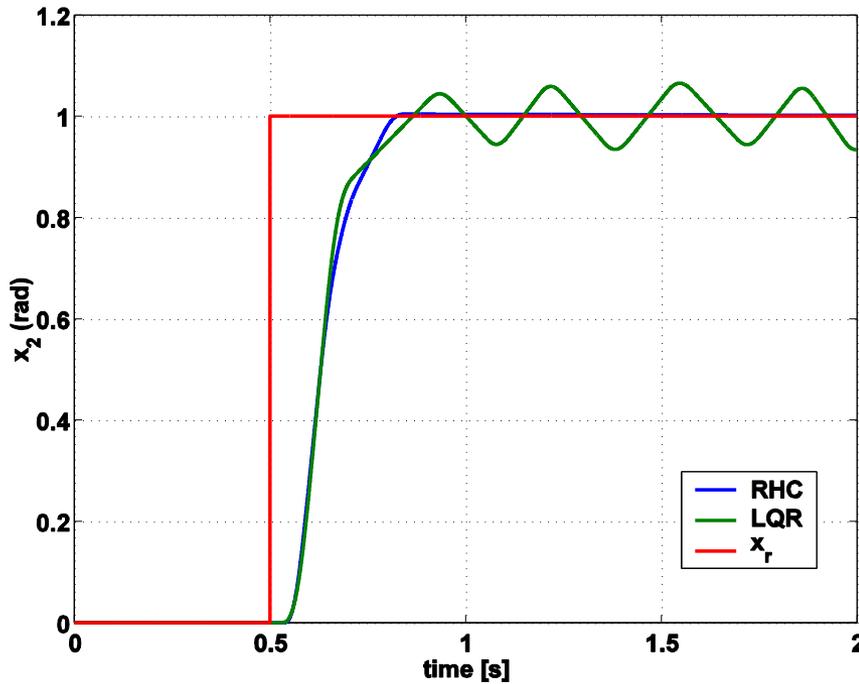
$$\begin{bmatrix} x_{r2} \\ x_{r4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

シミュレーション

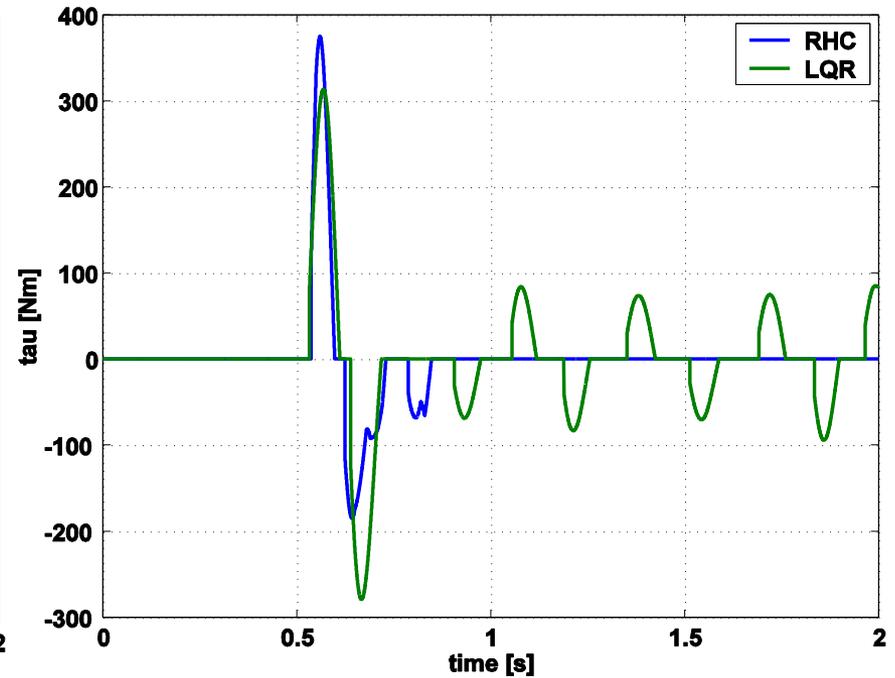
観測値(ノイズ:定常偏差0.05の正規外乱)		
x_1	(rad)	駆動部位置
x_2	(rad)	被駆動部位置
u	[Nm]	入力
モデルパラメータ2		
$M_1 = 1.0$	[kgm ²]	モータの慣性モーメント
$M_2 = 2.0$	[kgm ²]	アームの慣性モーメント
$K = 2000$	[Nm/rad]	接触トルクのばね係数
$D = 10.0$	[Nms/rad]	接触トルクのダンパ係数
$D_1 = 0.01, D_2 = 0.01$	[Nms/rad]	シャフトの摩擦係数
$2B = 0.04$	(rad)	バックラッシュ幅

シミュレーション結果

- 被駆動部の応答と伝達トルク



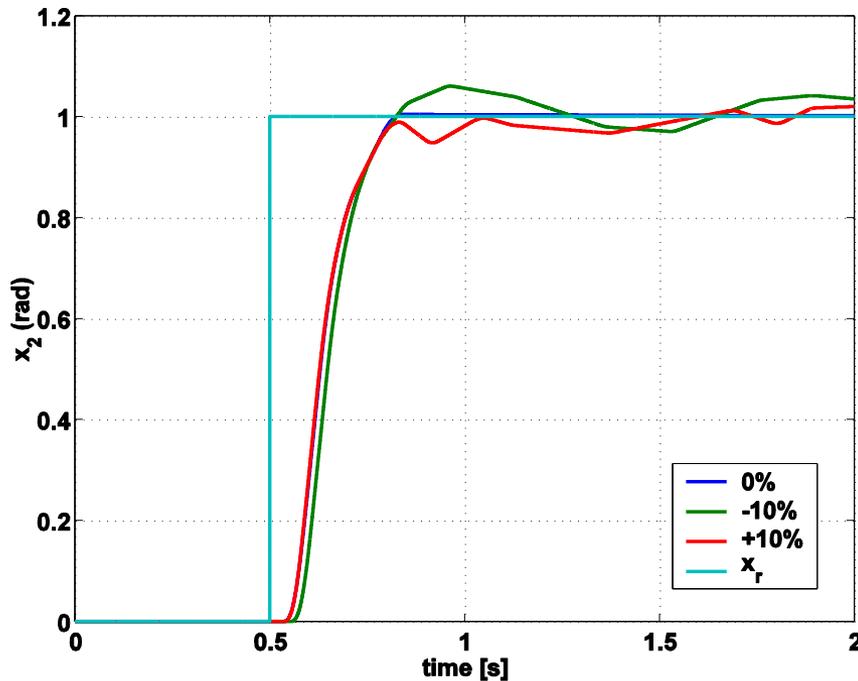
被駆動部の応答



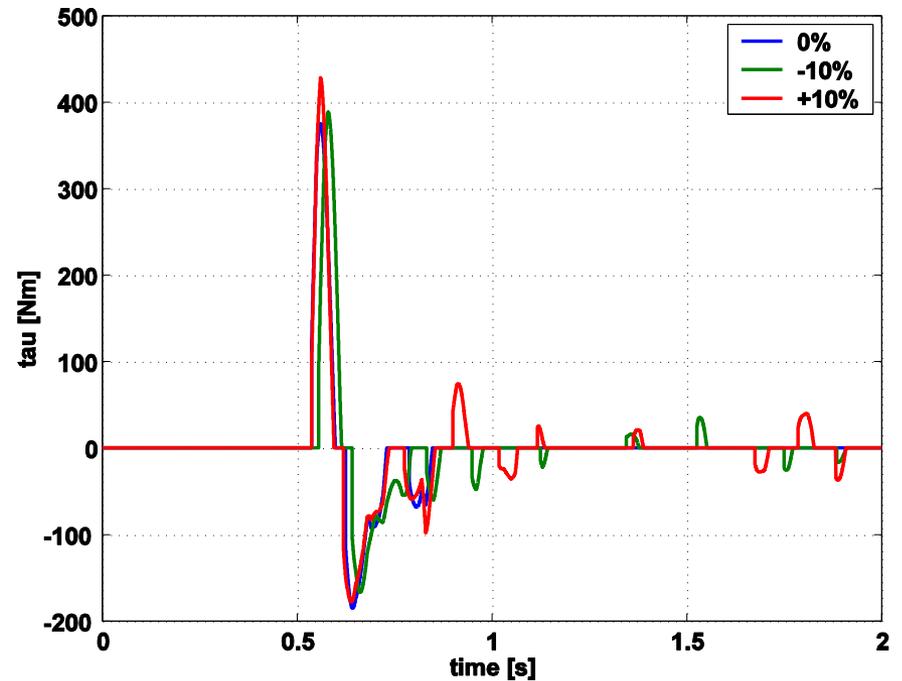
伝達トルク

シミュレーション結果

- モデルのバックラッシュ幅に±10%の誤差



被駆動部の応答



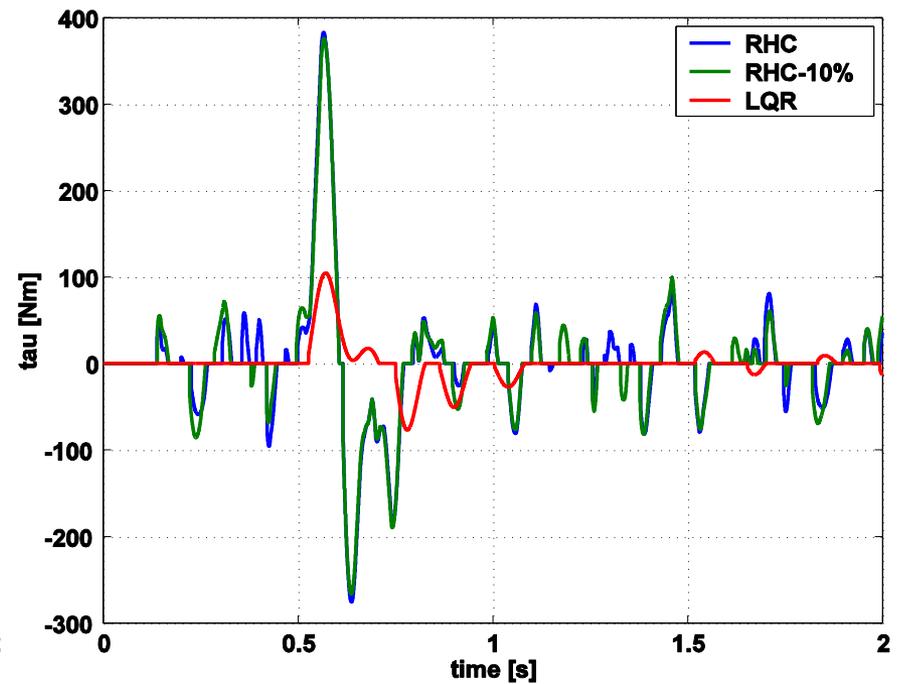
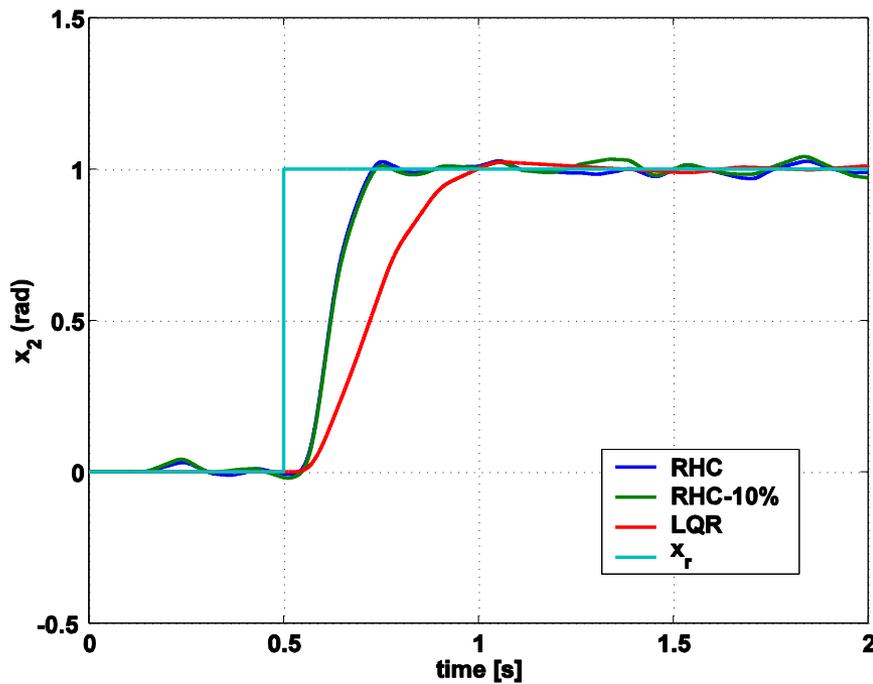
伝達トルク

モデルパラメータ

観測値	
x_1 (rad)	モータの位置
x_2 (rad)	アームの位置
u [Nm]	入力トルク
モデルパラメータ	
$M_1 = 0.00625$ [kgm ²]	モータの慣性モーメント
$M_2 = 0.025$ [kgm ²]	アームの慣性モーメント
$K = 100$ [Nm / rad]	接触トルクのばね係数
$D = 0.001$ [Nms / rad]	接触トルクのダンパ係数
$D_1 = 0.01, D_2 = 0.01$ [Nms / rad]	シャフトの摩擦係数
$2B = 0.2$ (rad)	バックラッシュ幅

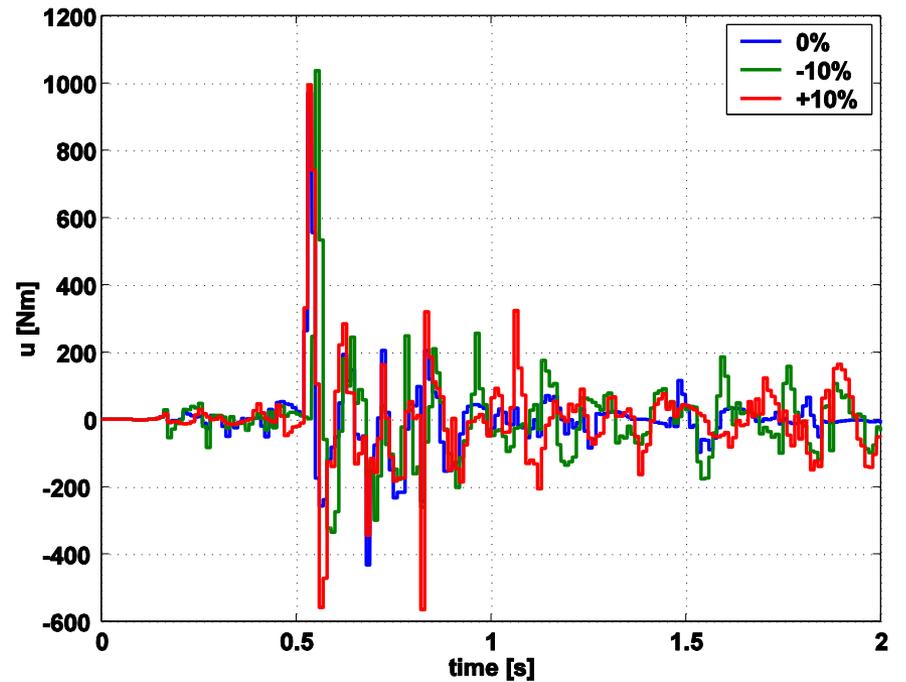
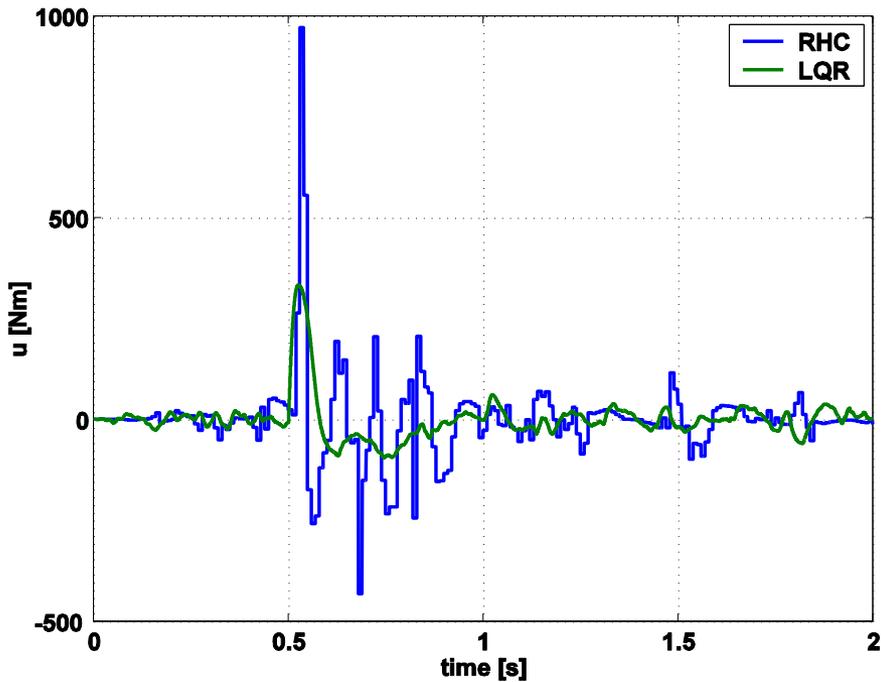
シミュレーション結果2

- モデルパラメータ2



シミュレーション結果

- 入力



ハイブリッドUKF

連続時間での状態の予測 + 離散時間での更新
対象のシステム

$$\begin{cases} dx(t) = f_c(x(t), t)dt + L(t)d\beta(t) \\ dy(t) = h_c(x(t), t)dt + V(t)d\eta(t) \end{cases}$$
$$\begin{cases} dx(t) = f_c(x(t), t)dt + L(t)d\beta(t) \\ y_k = h(x(t_k), t_k) + r_k \end{cases}$$

列毎の写像の変換

$$f: R^n \rightarrow R^m$$

$$X_i \in R^n, Y_i \in R^m$$

$$Y_i = f(X_i)$$

$$Y = [Y_1, \dots, Y_d] \in R^{m \times d}, X = [X_1, \dots, X_d] \in R^{n \times d}$$

$$Y = f(X)$$

伊藤の確率微分方程式 ‘超入門’

$$\begin{cases} x(t + \Delta t) = x(t) + f_c(x(t))\Delta t + L(t)\Delta\beta(t) + o(\Delta t), x(t) \in R^n \\ y(t + \Delta t) = y(t) + h_c(x(t))\Delta t + V(t)\Delta\eta(t) + o(\Delta t), y(t) \in R^p \end{cases}$$

が任意の小さな正の Δt について成り立つ時

$$\begin{cases} dx(t) = f_c(x(t), t)dt + L(t)d\beta(t) \\ dy(t) = h_c(x(t), t)dt + V(t)d\eta(t) \end{cases}$$

と表現する。ただし、 $\beta(t), \eta(t)$ は独立なブラウン運動で以下を満たす。

$$\begin{cases} \int d\beta = \beta(t), \quad E\{\beta(t)\} = 0, E\{\beta(t)\beta^T(t)\} = Q(t), \quad Q(t) = \text{diag}(q_1(t), \dots, q_n(t)) \\ \int d\eta = \eta(t), \quad E\{\eta(t)\} = 0, E\{\eta(t)\eta^T(t)\} = R(t), \quad R(t) = \text{diag}(r_1(t), \dots, r_p(t)) \\ \Delta\beta(t) \sim N(0, Q(t)\Delta t), \Delta\eta(t) \sim N(0, R(t)\Delta t) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0 \end{cases}$$

伊藤の公式

$x(t)$ が伊藤の確率微分方程式を満たす時

$$dx(t) = f_c(x(t), t)dt + L(t)d\beta(t)$$

$y = f(x)$ とすると y の微分方程式は次式となる。

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{1}{2} dx^T \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} dx$$

ただし、式を展開した後次の関係を利用。

$$\left\{ \begin{array}{l} dt^2 = 0, dt d\beta_i = 0, d\beta_i d\beta_j = 0 (i \neq j) \\ d\beta_i^2 = q_i dt \\ \text{(関数が2次の係数を持つ場合、確率的要素が確定的成分に！)} \end{array} \right.$$

連続系のKalman Filter(1)

$$P(t) := E\{\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\}, \tilde{x}(t) := x(t) - \hat{x}(t)$$

$$\begin{cases} \hat{x}^-(t + \Delta t) := \hat{x}(t) + f_c(\hat{x}(t), t)\Delta t (\text{状態の予測値}) \\ \hat{y}^-(t + \Delta t) := h_c(\hat{x}^-(t + \Delta t), t + \Delta t)\Delta t (\text{出力の予測値: 変化分}) \\ P^-(t + \Delta t) := E\{(x(t + \Delta t) - \hat{x}^-(t + \Delta t))(x(t + \Delta t) - \hat{x}^-(t + \Delta t))^T\} (\text{予測の共分散}) \end{cases}$$

$$S(t + \Delta t) := E\{(y(t + \Delta t) - \hat{y}^-(t + \Delta t))(y(t + \Delta t) - \hat{y}^-(t + \Delta t))^T\}$$

$$C(t + \Delta t) := E\{((x(t + \Delta t) - \hat{x}^-(t + \Delta t))(y(t + \Delta t) - \hat{y}^-(t + \Delta t))^T\}$$

$$K(t + \Delta t) := C(t + \Delta t)S^{-1}(t + \Delta t)$$

$$\hat{x}(t + \Delta t) = \hat{x}^-(t + \Delta t) + K(t + \Delta t)(\Delta y(t) - \hat{y}^-(t + \Delta t)), \Delta y(t) := y(t + \Delta t) - y(t)$$

連続系のKalman Filter(2)

$$\begin{aligned}
 P^-(t + \Delta t) &:= E\{(x(t + \Delta t) - \hat{x}^-(t + \Delta t))(x(t + \Delta t) - \hat{x}^-(t + \Delta t))^T\} \\
 &= E\{\underbrace{(x(t) - \hat{x}(t))}_{\tilde{x}(t)} + \underbrace{(f_c(x(t), t) - f_c(\hat{x}(t), t))\Delta t}_{\tilde{f}_c(t)} + L(t)\Delta\beta(t) + o(\Delta t)\}_{(x(t) \cdots)^T} \\
 &= E\{\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\} + E\{\tilde{x}(t)\tilde{f}_c^T(t) + \tilde{f}_c(t)\tilde{x}^T(t)\}\Delta t + \underbrace{E\{\tilde{x}(t)(L(t)\Delta\beta(t))^T + L(t)\Delta\beta(t)\tilde{x}^T(t)\}}_0 \\
 &\quad + E\{L(t)\Delta\beta(t)(L(t)\Delta\beta(t))^T\} + o(\Delta t)
 \end{aligned}$$

$$= P(t) + E\{\tilde{x}(t)\tilde{f}_c^T(t) + \tilde{f}_c(t)\tilde{x}^T(t)\}\Delta t + L(t)Q(t)L^T(t)\Delta t + o(\Delta t)$$

$$S(t + \Delta t) := E\{\underbrace{(y(t + \Delta) - \hat{y}^-(t + \Delta))}_{\tilde{y}(t + \Delta t)}(y(t + \Delta) - \hat{y}^-(t + \Delta))^T\}$$

$$= E\{\underbrace{((h_c(x(t), t) - h_c(\hat{x}(t), t))\Delta t + V(t)\Delta\eta(t) + o(\Delta t))}_{\tilde{h}_c(t)}(h_c \cdots)^T\}$$

$$= V(t)R(t)V^T(t)\Delta t + o(\Delta t)$$

$$C(t + \Delta t) = E\{\tilde{x}(t + \Delta t)\tilde{y}(t + \Delta t)^T\} = E\{\tilde{x}(t + \Delta t)\tilde{h}_c(t)\}\Delta t + o(\Delta t)$$

連続系のKalman Filter (3)

$$\begin{aligned}
 K(t + \Delta t) &= C(t + \Delta t)S^{-1}(t + \Delta t) \\
 &= (E\{\tilde{x}(t + \Delta t)\tilde{h}_c^T(t)\}\Delta t + o(\Delta t))(V(t)R(t)V^T(t)\Delta t + o(\Delta t))^{-1} \\
 &= (E\{\tilde{x}(t + \Delta t)\tilde{h}_c^T(t)\} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t})(V(t)R(t)V^T(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t})^{-1} \\
 &= E\{\tilde{x}(t + \Delta t)\tilde{h}_c^T(t)\}(V(t)R(t)V^T(t))^{-1} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}
 \end{aligned}$$

$$K(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} K(t + \Delta t) = E\{\tilde{x}(t + \Delta t)\tilde{h}_c^T(t)\}(V(t)R(t)V^T(t))^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{x}(t + \Delta t) &= \hat{x}^-(t + \Delta t) + K(t + \Delta t)(\Delta y(t) - \hat{y}^-(t + \Delta t)) \\
 &= \hat{x}(t) + f_c(\hat{x}(t), t)\Delta t + K(t + \Delta t)(\Delta y(t) - \hat{y}^-(t + \Delta t))
 \end{aligned}$$

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = f_c(\hat{x}(t), t) + K(t)(z(t) - h_c(x(t), t)), z(t) := \frac{dy}{dt}$$

連続系のKalman Filter(4)

$$\begin{aligned} P(t + \Delta t) &= P^-(t + \Delta t) - K(t + \Delta t)S(t + \Delta t)K^T(t + \Delta t) \\ &= P(t) + E\{\tilde{x}(t)\tilde{f}_c^T(t) + \tilde{f}_c(t)\tilde{x}^T(t)\}\Delta t + L(t)Q(t)L^T(t)\Delta t - K(t + \Delta t)S(t + \Delta t)K^T(t + \Delta t) + o(\Delta t) \end{aligned}$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = E\{\tilde{x}(t)\tilde{f}_c^T(t) + \tilde{f}_c(t)\tilde{x}^T(t)\} + L(t)Q(t)L^T(t) - K(t)(V(t)R(t)V^T(t))^{-1}K(t)$$

連続系のLITシステムのKalman Filter

$$\begin{cases} dx(t) = (Ax(t) + Bu(t))dt + L(t)d\beta(t) \\ dy = Cx(t)dt + V(t)d\eta(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E\{\tilde{x}(t)\tilde{f}_c^T(t) + \tilde{f}_c(t)\tilde{x}^T(t)\} &= E\{\tilde{x}(t)(A\tilde{x}(t))^T + A\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\} \\ &= P(t)A^T + AP(t) \end{aligned}$$

$$E\{\tilde{x}(t)\tilde{h}_c^T(t)\} = E\{\tilde{x}(t)(C\tilde{x}(t))^T\} = P(t)C^T$$

$$K(t) = P(t)C^T (V(t)R(t)V^T(t))^{-1}$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)A^T + AP(t) + L(t)Q(t)L^T(t) - K(t)(V(t)R(t)V^T(t))^{-1}K(t)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)A^T + AP(t) + L(t)Q(t)L^T(t) - P(t)C^T V(t)R(t)V^T(t)K(t)CP(t)$$

2次形式最適制御との双対性(1)

Kalman Filter

対象のシステム

$$\begin{cases} dx(t) = (Ax(t) + Bu(t))dt + L(t)d\beta(t) \\ dy = Cx(t)dt + V(t)d\eta(t) \end{cases}$$

誤差の共分散行列の更新式

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)A^T + AP(t) + L(t)Q(t)L^T(t) - P(t)C^TV(t)R(t)V^T(t)K(t)CP(t)$$

2次形式最適制御問題

対象のシステム

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

2次形式評価関数

$$J(x) = \int_0^T x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)dt$$

Ricatti方程式

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)A + A^TP(t) + Q - P(t)BR^{-1}B^TP(t)$$

2次形式最適制御との双対性(2)

誤差の共分散行列の更新式

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)A^T + AP(t) + L(t)Q(t)L^T(t) - P(t)C^TV(t)R(t)V^T(t)K(t)CP(t)$$

Ricatti方程式

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)A + A^TP(t) + Q - P(t)BR^{-1}B^TP(t)$$

双対関係

制御		推定
A	\leftrightarrow	A^T
B	\leftrightarrow	C^T
Q	\leftrightarrow	$L(t)Q(t)L^T(t)$
R	\leftrightarrow	$V(t)R(t)V^T(t)$

行列表現のUT

$$\begin{cases} w = [W_0, W_1, \dots, W_{2n}]^T \\ W = (I - [w, \dots, w]) \times \text{diag}(W_0, \dots, W_{2n}) \times (I - [w, \dots, w])^T \\ c = n + \kappa \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{X} = \overbrace{[m, \dots, m]}^{2n+1} + \sqrt{c}[0, \sqrt{P}, -\sqrt{P}], \hat{x} = \mathcal{X}w \\ \mathcal{Y} = g(\mathcal{X}), \hat{y} = \mathcal{Y}w \\ \hat{P}_{\mu\mu} = \mathcal{Y}W\mathcal{Y}^T \\ \hat{P}_{x\mu} = \mathcal{X}W\mathcal{Y}^T \end{cases}$$

証明

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_{i=0}^{2n} W_i (\mathcal{X}_i - \hat{x})(\mathcal{X}_i - \hat{x})^T \\
 &= [\mathcal{X}_0 - \hat{x} \quad \cdots \quad \mathcal{X}_{2n} - \hat{x}] \begin{bmatrix} W_0 & & \\ & \ddots & \\ & & W_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathcal{X}_0 - \hat{x})^T \\ \vdots \\ (\mathcal{X}_{2n} - \hat{x})^T \end{bmatrix} \\
 &= (\mathcal{X} - [\hat{x} \quad \cdots \quad \hat{x}]) \begin{bmatrix} W_0 & & \\ & \ddots & \\ & & W_{2n} \end{bmatrix} (\mathcal{X} - [\hat{x} \quad \cdots \quad \hat{x}])^T \\
 &= (\mathcal{X} - \mathcal{X}w[1 \quad \cdots \quad 1]) \begin{bmatrix} W_0 & & \\ & \ddots & \\ & & W_{2n} \end{bmatrix} (\mathcal{X} - \mathcal{X}w[1 \quad \cdots \quad 1])^T \\
 &= \mathcal{X} [I - [w \quad \cdots \quad w]] \begin{bmatrix} W_0 & & \\ & \ddots & \\ & & W_{2n} \end{bmatrix} [I - [w \quad \cdots \quad w]]^T \mathcal{X}^T \\
 &= \mathcal{X}W\mathcal{X}^T, W := [I - [w \quad \cdots \quad w]] \begin{bmatrix} W_0 & & \\ & \ddots & \\ & & W_{2n} \end{bmatrix} [I - [w \quad \cdots \quad w]]^T
 \end{aligned}$$

行列表現のUKFアルゴリズム

予測

$$\begin{cases} \mathcal{X}(k-1|k-1) = [\hat{x}(k-1|k-1), \dots, \hat{x}(k-1|k-1)] + \sqrt{c}[0, \sqrt{P(k-1|k-1)}, -\sqrt{P(k-1|k-1)}] \\ \mathcal{X}^-(k|k-1) = f(\mathcal{X}(k-1|k-1), k-1) \\ \hat{x}(k|k-1) = \mathcal{X}(k|k-1)w \\ P(k|k-1) = \mathcal{X}^-(k|k-1)W\mathcal{X}^-(k|k-1)^T + Q(k-1) \end{cases}$$

更新

$$\begin{cases} \mathcal{X}(k|k-1) = [\hat{x}(k|k-1), \dots, \hat{x}(k|k-1)] + \sqrt{c}[0, \sqrt{P(k|k-1)}, -\sqrt{P(k|k-1)}] \\ \mathcal{Y}(k|k-1) = h(\mathcal{X}(k|k-1)) \\ \hat{y}(k|k-1) = \mathcal{Y}(k|k-1)w \\ P_{vv}(k|k-1) = \mathcal{Y}(k|k-1)W[\mathcal{Y}(k|k-1)]^T + R(k) \\ P_{xv}(k|k-1) = \mathcal{X}(k|k-1)W[\mathcal{Y}(k|k-1)]^T \end{cases}$$

$$\begin{cases} W(k) = P_{xv}(k|k-1)P_{vv}(k|k-1)^{-1} \\ \hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + W(k)(y(k) - \hat{y}(k|k-1)) \\ P(k|k) = P(k|k-1) - W(k)P_{vv}(k|k-1)W(k)^T \end{cases}$$

連続系のUKFアルゴリズム(2) (UKBF)

一般の式で次の近似を用いる

$$\begin{cases} E\{\tilde{x}(t)\tilde{f}_c^T(t)\} \approx X(t)Wf_c^T(X(t),t) \\ E\{\tilde{x}(t)\tilde{h}_c^T(t)\} \approx X(t)Wh_c^T(X(t),t) \end{cases}$$

アルゴリズム

$$\begin{cases} \frac{dm(t)}{dt} = f(X(t),t)w + K(t)[z(t) - h(X(t),t)w] \\ \frac{dP(t)}{dt} = X(t)Wf^T(X(t),t) + f(X(t),t)WX^T(t) + L(t)Q_c(t)L^T(t) - K(t)V(t)R_c(t)V^T(t)K^T(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} K(t) = X(t)Wh^T(X(t),t)[V(t)R_c(t)V^T(t)]^{-1} \\ X(t) = [m(t), \dots, m(t)] + \sqrt{c}[0, \sqrt{P(t)}, -\sqrt{P(t)}] \end{cases}$$

ハイブリッドUKFアルゴリズム

$$R_c(t) = \infty$$

$$\begin{cases} \frac{dm(t)}{dt} = f(X(t), t)w \\ \frac{dP(t)}{dt} = X(t)Wf^T(X(t), t) + f(X(t), t)WX^T(t) + L(t)Q_c(t)L^T(t) \end{cases}$$

更新のアルゴリズムは離散の場合と同じ

領域拘束を考慮した状態推定

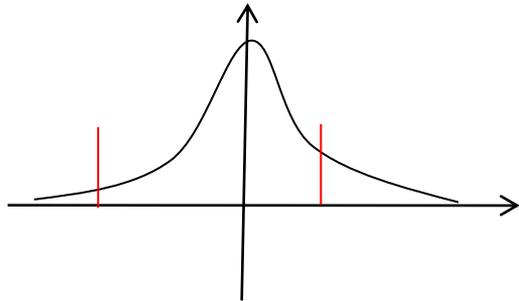
$$\begin{cases} x(k) = f(x(k-1), u(k-1), w(k-1), k-1) \\ y(k) = h(x(k), v(k), k) \end{cases}$$

$$a(k) \leq \phi^T(k) x_k \leq b(k), \phi(k) \in R^{n \times s}$$

$$\begin{cases} \phi_i^T(k) x(k) = a_i(k), c_i = 1 & \text{if } \phi_i^T(k) x(k) \leq a_i(k) \\ \text{No constraint, } c_i = 0 & \text{if } a_i(k) < \phi_i^T(k) x(k) < b_i(k) \\ \phi_i^T(k) x(k) = b_i(k), c_i = 1 & \text{if } b_i(k) \leq \phi_i^T(k) x(k) \end{cases}$$

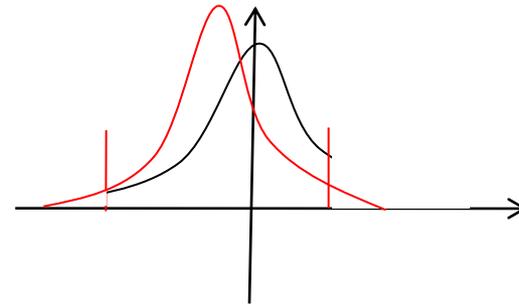
Truncated UKF

- PDFの打ち切り (shimada,98)



拘束なしの PDF

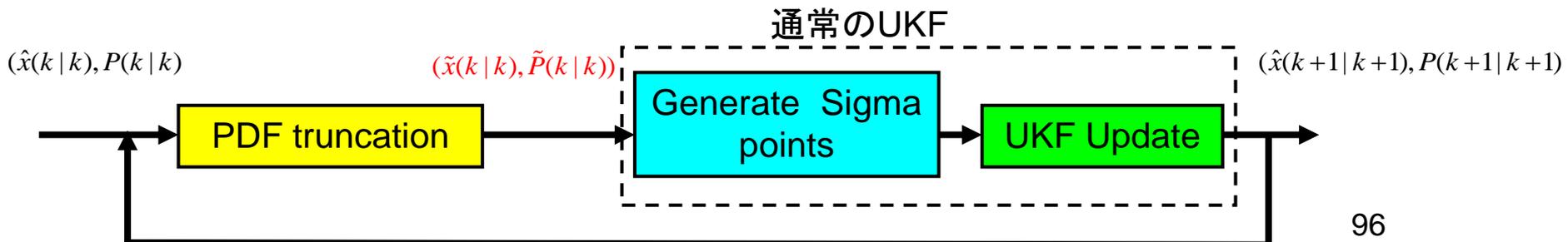
$$\hat{x}(k|k), P(k|k)$$



拘束ありの PDF

$$\tilde{x}(k|k), \tilde{P}(k|k)$$

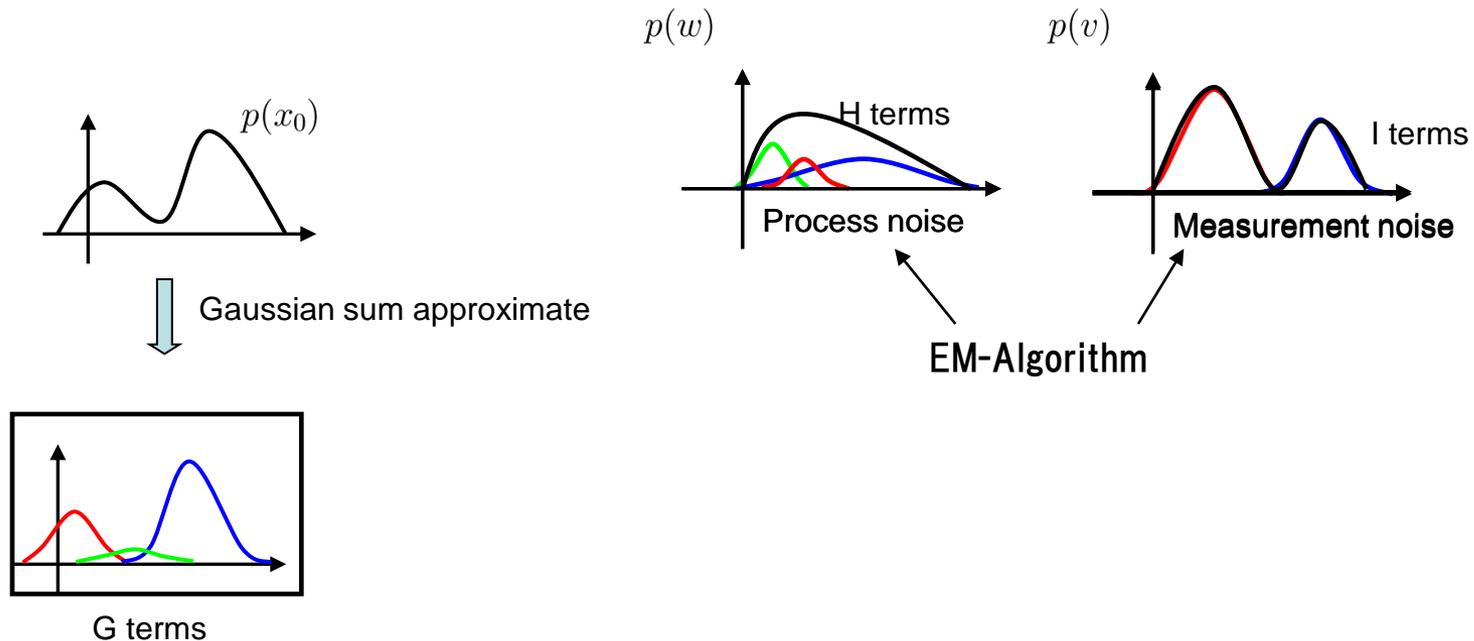
- UKFへの応用



Constrained Unscented Gaussian Sum Filter

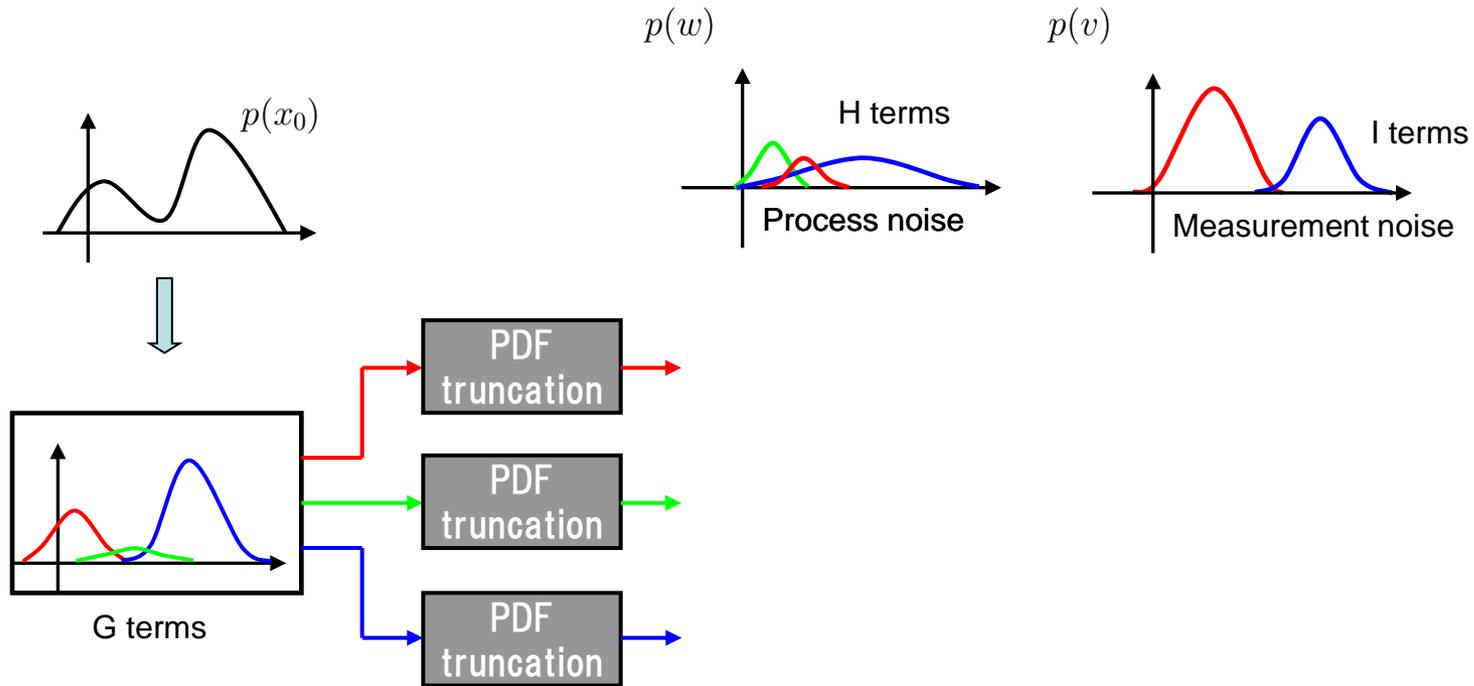
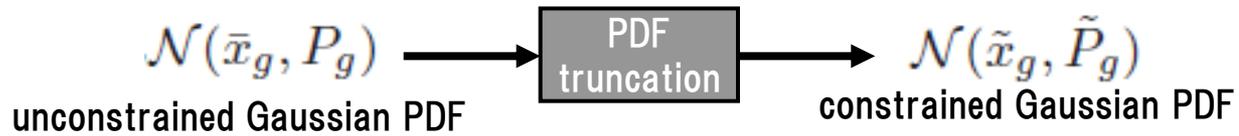
$p(x_0), p(w_k), p(v_k)$ を混合ガウス分布で近似する

$$p(x_0) = \sum_{g=1}^G \alpha_g \mathcal{N}(\bar{x}_g, P_g), \quad \sum_{g=1}^G \alpha_g = 1, \quad p(w_k) = \sum_{h=1}^H \beta_h \mathcal{N}(\bar{w}_h, Q_h), \quad \sum_{h=1}^H \beta_h = 1, \quad p(v_k) = \sum_{i=1}^I \gamma_i \mathcal{N}(\bar{v}_i, R_i), \quad \sum_{i=1}^I \gamma_i = 1.$$



Constrained Unscented Gaussian Sum Filter

Calculate constrained Gaussian PDF by PDF truncation for each Gaussian PDFs.

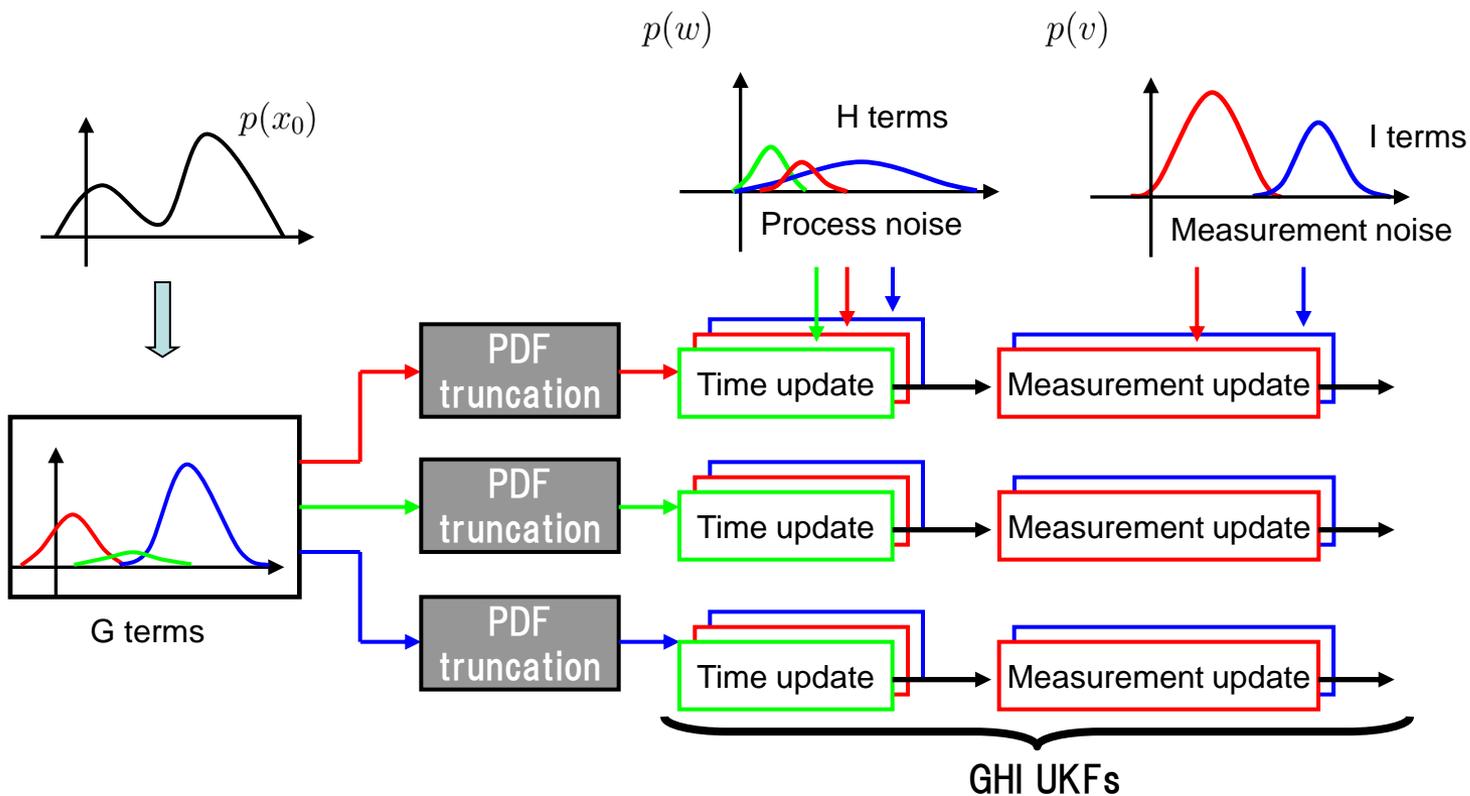


Constrained Unscented Gaussian Sum Filter (1)

GHI 個のUKFを異なるノイズによって並列に計算

GHI個のガウス分布が得られる

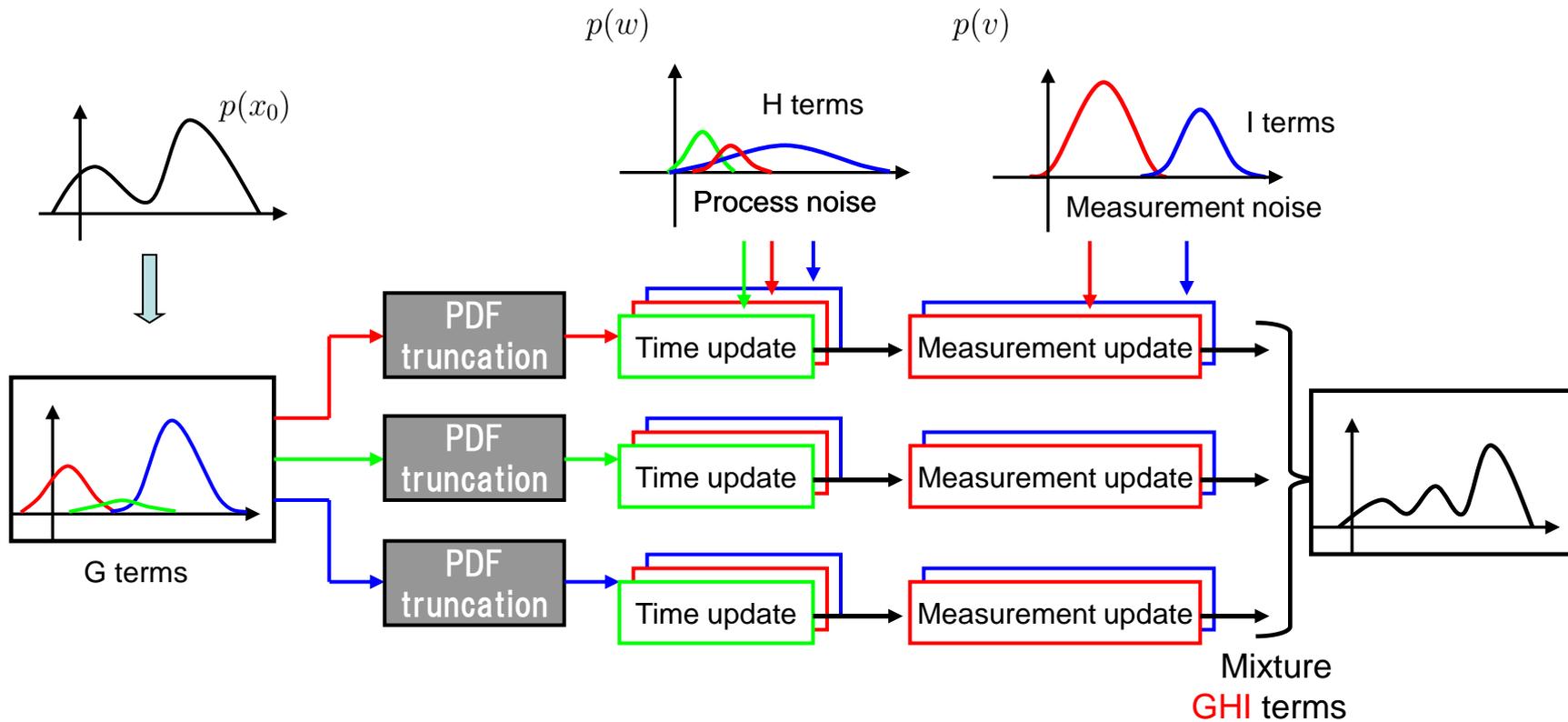
$$\mathcal{N}(\hat{x}_{g,h,i}, P_{g,h,i})$$



Constrained Unscented Gaussian Sum Filter (2)

推定値はそれらの平均値の重み付平均値で求める

$$\hat{x}_{k|k} = \sum_{g=1}^G \sum_{h=1}^H \sum_{i=1}^I \xi_{g,h,i} \hat{x}_{g,h,i}$$



Constrained Unscented Gaussian Sum Filter (3)

数値的計算量の指数的大増の問題：
混合する分布の数が指数的に増大する

1回目の推定	2回目の推定	3回目の推定	...	N回目の推定
GHI	$GHI \times HI$	$GHI \times (HI)^2$		$GHI \times (HI)^{n-1}$

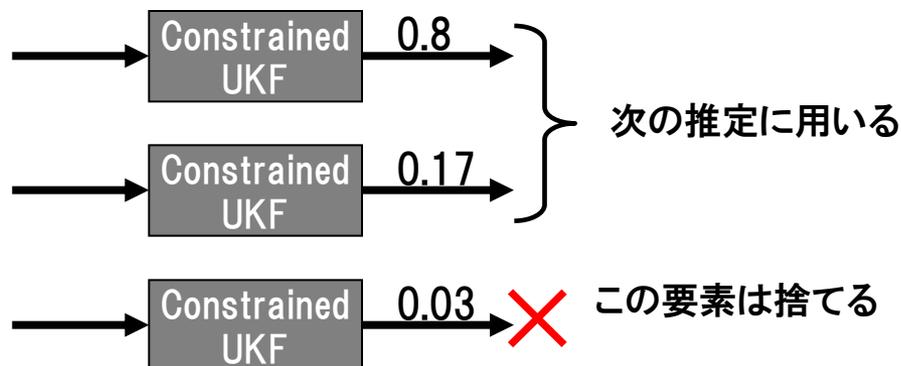


計算量を抑えるために“pruning”(枝狩り)を行う
一定以下の重みを持つ要素を捨てる

ϵ .

例)

$$\epsilon = 0.05$$



アンサンブルカルマンフィルター(EnKF)

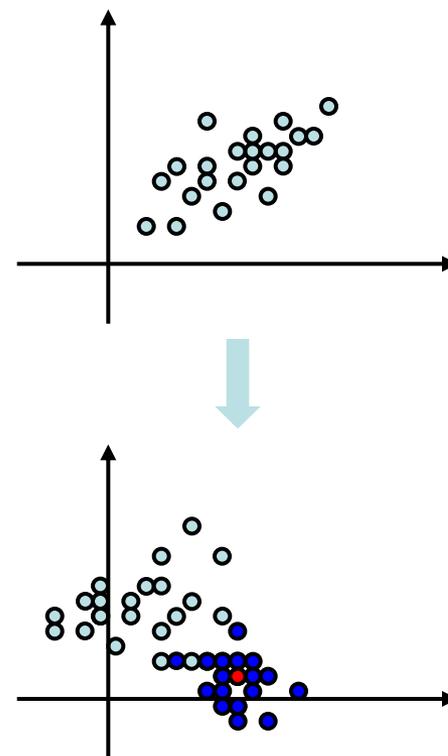
予測

$$\begin{cases} \hat{x}^{(i)}(k | k-1) = f(\hat{x}^{(i)}(k-1 | k-1), u(k-1), w^{(i)}(k-1), k-1) \\ \hat{y}^{(i)}(k | k-1) = h(\hat{x}^{(i)}(k | k-1), v^{(i)}(k), k), \quad (i=1, \dots, N) \end{cases}$$

更新

$$\begin{cases} \hat{x}(k | k-1) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x^{(i)}(k | k-1) \\ \hat{y}(k | k-1) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{y}_{(k|k-1)}^{(i)} \\ P_{xv}(k) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \{\hat{x}(k | k-1) - \hat{x}^{(i)}(k | k-1)\} \times \{\hat{y}(k | k-1) - \hat{y}^{(i)}(k | k-1)\}^T \\ P_{vv}(k) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \{\hat{y}(k | k-1) - \hat{y}^{(i)}(k | k-1)\} \times \{\hat{y}(k | k-1) - \hat{y}^{(i)}(k | k-1)\}^T \end{cases}$$

$$\begin{cases} K(k) = P_{xv}(k)(P_{vv}(k))^{-1} \\ \hat{x}^{(i)}(k | k) = \hat{x}^{(i)}(k | k-1) + K(k)(y(k) - \hat{y}^{(i)}(k | k-1)) \end{cases}$$



計算の簡略化：粒子のプロジェクトン

状態拘束を考え、pdf truncationを用いると計算量が増大する

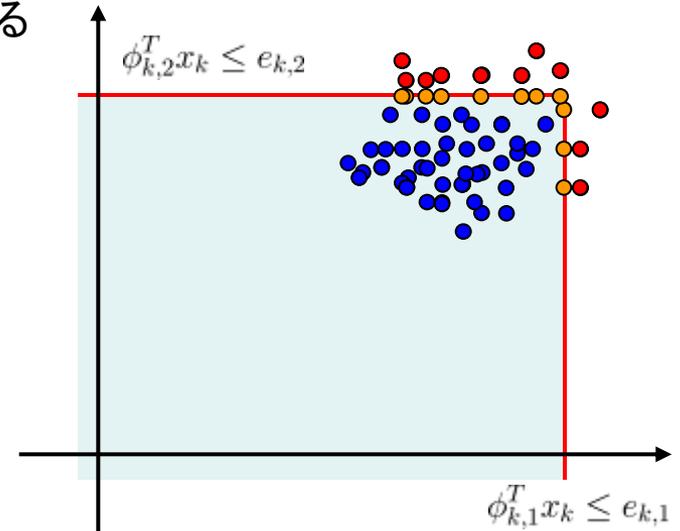


分布のパラメータを修正するより、粒子の方を修正する

$$\tilde{x}^{(i)}(k|k) = \min_{\tilde{x}^{(i)}(k|k)} \left[(\tilde{x}^{(i)}(k|k) - \hat{x}^{(i)}(k|k))^T I(\tilde{x}^{(i)}(k|k) - \hat{x}^{(i)}(k|k)) \right]$$

s.t.

$$\begin{cases} c_i(\phi_i^T(k)\tilde{x}^{(i)}(k|k) - a_i(k)) = 0 \\ c_i(\phi_i^T(k)\tilde{x}^{(i)}(k|k) - b_i(k)) = 0 \end{cases} (i=1, \dots, s)$$



数値例(1)

対象の非線形システム

$$x[k] = \begin{bmatrix} x_1[k-1] + T \\ 2 \sin\{0.5(x_1[k-1] + T)\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w[k-1] \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$y[k] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x[k] + v[k]$$

ノイズの性質

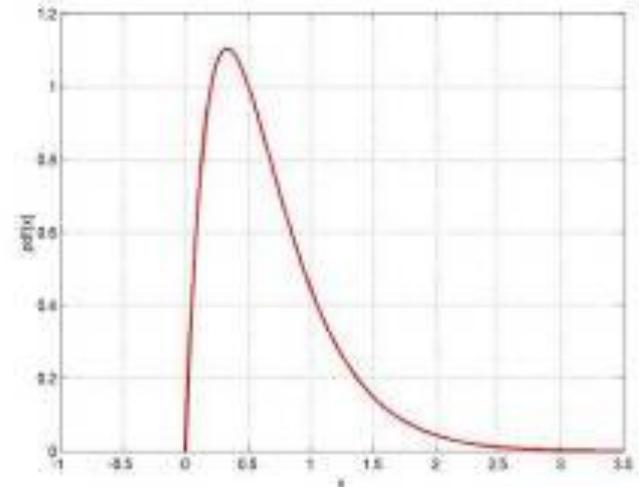
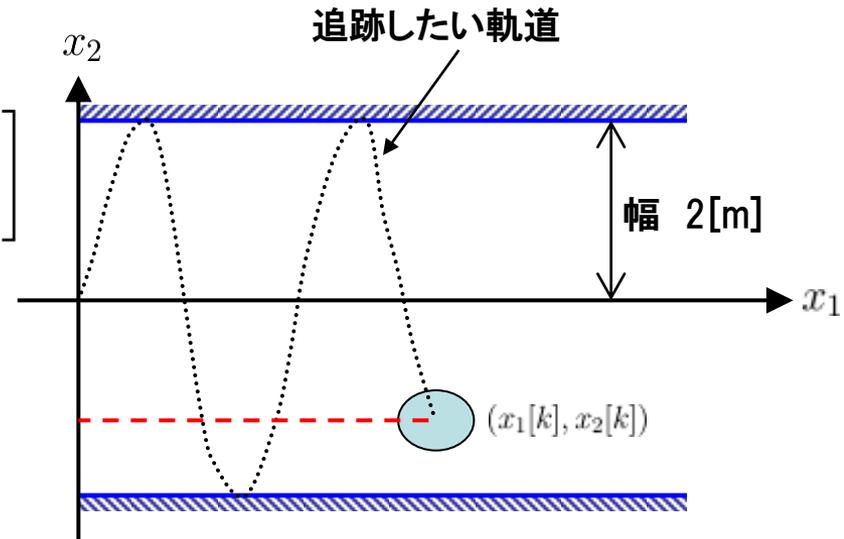
$$w = \mathcal{G}a(2, 3) \quad \text{mean } \frac{2}{3} \quad \text{variance } \frac{2}{9}$$

$$v = \mathcal{N}(0, 0.8)$$

状態拘束

$$x_1[k] \geq x_1[0] + kT$$

$$-2 \leq x_2[k] \leq 2$$



数値例(2)

50回のモンテカルロシミュレーションの結果

評価指標

計算時間 CPU time

推定精度

$$RMSE_j = \sqrt{\frac{1}{N_f} \sum_{k=1}^{N_f} (x_{k,j} - \hat{x}_{k|k,j})^2}, j = 1, \dots, n$$

アルゴリズム	TUKF	CUGSF	CEnKF(50)	E-CEnKF(50)	E-CEnKF(100)
RMSE of x1 [m]	1.60	1.00	0.94	0.97	0.93
RMSE of x2 [m]	0.54	0.53	0.49	0.49	0.48
Time [ms]	2.72	54.6	94.3	12.7	25.1

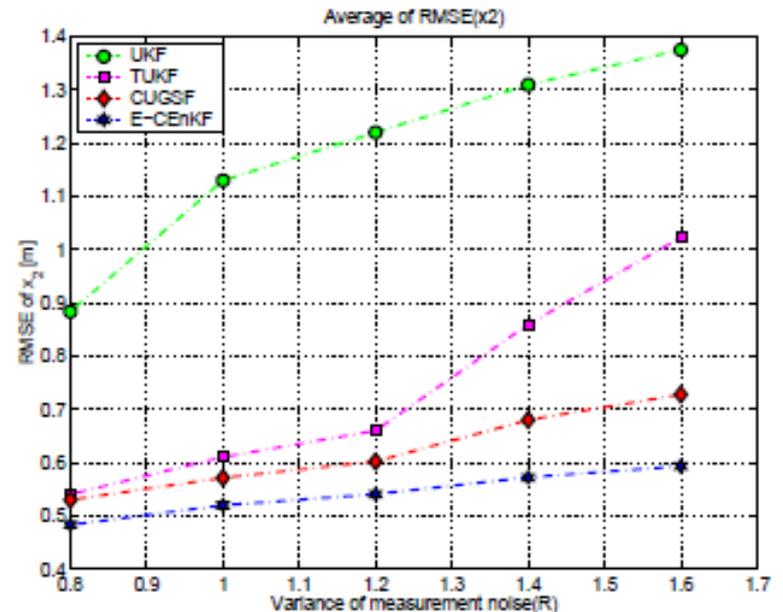
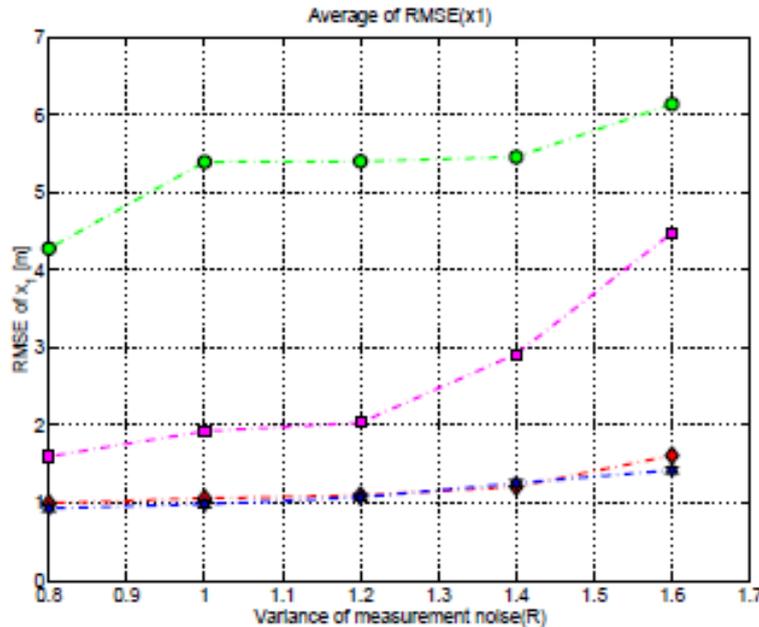
※ (50),(100) は粒子数を表す

- ・ 非ガウス性ノイズを陽に仮定するCUGSF, CEnKF、E-CEnKF はTUKFよりも良い推定精度を持つ
- ・ EnKFを基本とするアルゴリズムはCUGSFよりも良い推定を与える
- ・ E-CEnKFはCEnKFの推定精度は同程度であるが非常に高速である

数値例(3)

TUKF高速であるが非ガウス性ノイズをどの程度扱えるか？

観測ノイズだけを 0.8 から1.6 ま0.2,刻みで変えて50-回のモンテカルロシミュレーションを行う



TUKFはRを増加させると性能が非常に悪くなる

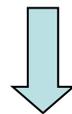
CUGSF,E-CEnKFは性能の劣化は小さい

数値例：同時推定（１）

- 状態とパラメータの一部を同時に推定する問題を考える
- 状態と同時にパラメータ “ b ” も推定する

$$x[k] = \begin{bmatrix} x_1[k-1] + T \\ 2 \sin\{b(x_1[k-1] + T)\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w[k-1] \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$y[k] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x[k] + v[k],$$

公称値: 0.5, 不確定性の範囲: $\pm 20\%$



拡大系を考える

$$x[k] = \begin{bmatrix} x_1[k-1] + T \\ 2 \sin\{x_3[k-1](x_1[k-1] + T)\} \\ x_3[k-1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w[k-1] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} v_1[k] \\ v_2[k] \end{bmatrix}.$$

x_3 の状態拘束

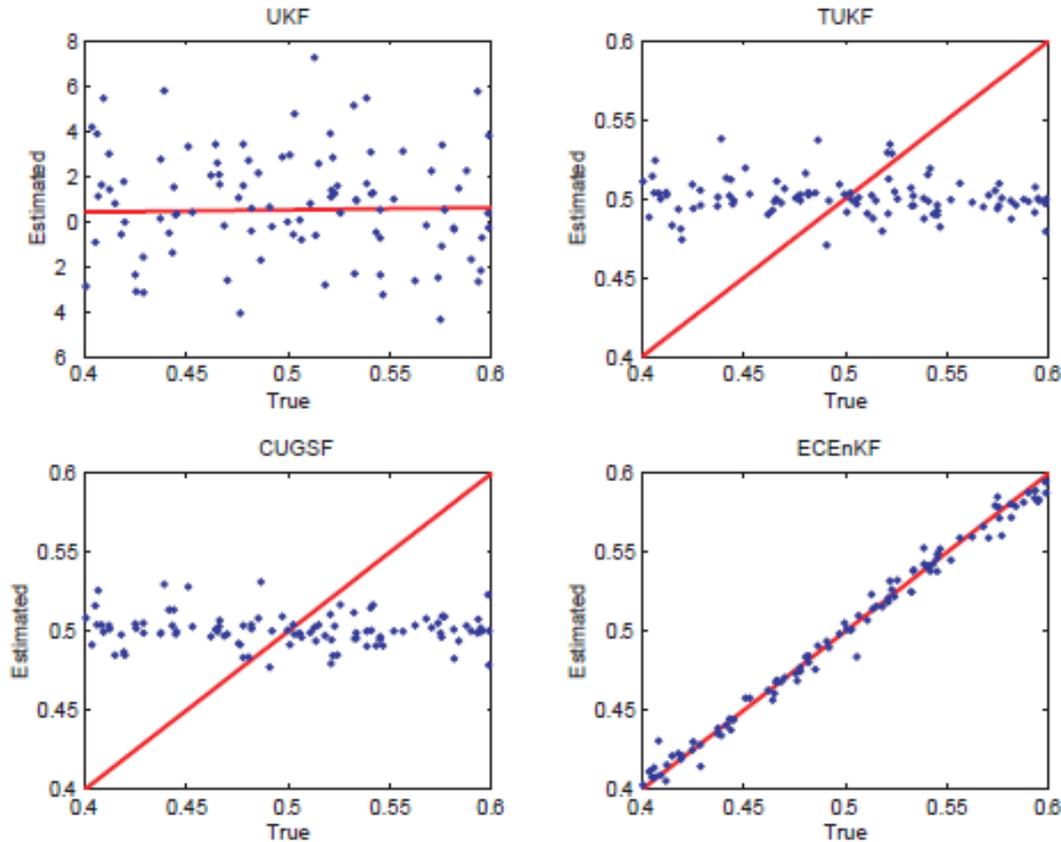
$$0.4 \leq x_3 \leq 0.6$$

注意:

フィルターの安定性を確保するために観測方程式を修正している

数値例：同時推定(2)

200ステップのパラメータ推定結果
(横軸：真値、縦軸：推定値)



	RMSE of x1	RMSE of x2
TUKF	1.68	0.94
CUGSF	1.86	0.90
ECEnKF	1.20	0.52

E-CEnKFが状態だけでなくパラメータに関しても良い推定を与えている

まとめ

- 本講義では、線形システムに対する状態推定の基本と非線形システムに対する状態推定手法をUKF、UKBFを中心に解説した
- 非ガウス性のノイズや状態拘束に対する対処についても説明した
- その応用例を数値シミュレーションにより示した
- 実際の適用に当たっては、パーティクルフィルターなど他の手法との比較、組み合わせが重要である

その他のアプリケーション

- EnKFを無駄時間観測や観測順序が乱れた信号からの推定
(IEEE Aero-space Conference, 2011)
- U変換を利用した確率システムの制御
(SICE 第2回プラントモデリングシンポジウム, 2011)

参考文献(1)

- 片山徹著:新版応用カルマンフィルタ 朝倉書店
- A.H.Jazwinski: Stochastic Processes and Filtering Theory, New York:Academic, 1970
- G.C.Goodwin and K.S.Sin :ADAPTIVE FILTERING PREDICTION AND CONTROL , PRENTICE-HALL (1984)
- C.Chui and G.Chen: Kalman Filtering with Real-Time Applications, 4th ed., Springer (2009)
- S.J.Julier and J.K.Uhmann :A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimators」,*IEEE Trans.Autom.Contr.* Vol.45,No.3 (2000)
- T.Lefebvre,et.al「Comment on “A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimators」
- S.J.Julier and J.K.Uhmann 「A General Method for Approximating Nonlinear Transformation of Probability Distributions」 [Online]1996
- E.A.Wan and R. Merwe : The Square-Root Unscented Kalman Filter for State and Parameter Estimation, Proc. Of Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing (2001)
- S.Julier and J. Uhlmann : Unscented Filtering and Nonlinear Estimation, Proceedings of The IEEE, Vol. 92, No. 3, (2004)
- M.Yamakita et. al. : Comparative Study of Simultaneous Parameter-State Estimations, Proc. of CCA 2004 (2004)
- 山北:UKFって何? ,,システム制御情報学会 (2006)
- M.Saito, M.Yamakita: MPC for a Simplified Transmission Model with Backlash Using UKF, Proc. of CCA2006, pp.527/532 (2006)
- S.Sarkka: On Unscented Kalman Filtering for Sate Estimation of Continuous-Time Nonlinear Systems, *IEEE Trans. Autom Contr.*, Vol.52, No.9 (2007)

参考文献(2)

- S.Ishihara, M.Yamakita: Efficient Unscented Filtering for Nonlinear Systems with State Constraints, Proc. of ECC09 (2009)
- S.Ishihara, M.Yamakita: Constrained State Estimation for Nonlinear Systems with non-Gaussian Noise, Proc. of CDC09 (2009)
- 石原新士、山北昌毅: 非ガウス雑音を受ける領域拘束付き非線形システムの状態推定, 電気学会論文誌 C, Vol. 129, No. 11 (2009)
- D.Simon and T.L.China: Kalman filtering with state equality constraints, IEEE Trans. On Aerospace and Electronic Systems, vol. 38, No.1, pp.128/136 (2002)