第1章　ロボット工学

1.0.1　ロボット工学の研究分野

- 要素技術
- 総合技術

要素技術

1. ハードウェア
    - センサ
        - 視覚センサ
            - ２次元センサ
            - ３次元センサ
        - 力覚センサ
            - 力センサ
            - トルクセンサ
            - 触覚センサ (Tactile Sensor)
        - 聴覚センサ
            - 可聴帯域センサ
            - 超音波センサ
        - 味覚センサ
        - 嗅覚センサ
    - 構成要素
        - 素材
            - 金属
            - グラスファイバー
            - ゴム・プラスチック
        - 関節要素
            - 歯車ギヤ
            - ハーモニックギヤ
            - 磁気軸受け

- アクチュエータ
  - DC モータ
  - AC モータ
  - DD モータ
  - 油圧モータ
  - 空気圧アクチュエータ (ラバチュエータ等)
  - 形状記憶合金
  - 超音波モータ
  - マイクロアクチュエータ
- 制御計算機
  - ロボット向けアーキテクチャの開発
  - DSP 等の応用

2. ソフトウェア

- ロボット言語
- 環境認識
- ソフトコンピューティング応用 (FAN 技術)
  - 人工ニュウーラルネットワーク応用
  - ファジー理論応用
  - GA(進化的計算) 応用

総合技術

1. ハードウェア
    - 非移動ロボット
        - ロボットアームの制御
        - 多指ハンドの操り制御
        - 冗長時由度の制御
    - 移動ロボット
        - 車輪駆動ロボット
        - 1、2、4、6 足ロボット
        - 多足・無関節ロボット
        - 海中探査ロボット
        - 宇宙ロボット
    - ヒューマノイド・ロボット
    - アミューズメント・ロボット
    - 看護ロボット
2. ソフトウェア
    - ヒューマンインターフェース
    - 劣駆動系の制御技術

応用分野

- 製造産業応用
- サービス産業応用
- ホームロボット
    - ペットロボット (癒しロボット)
    - 介護ロボット

ロボットアームの制御による分類

1. 位置・姿勢の制御
    - PTP 制御
    - CP 制御

2. 力制御
3. 位置と力のハイブリッド制御
4. インピーダンス制御
5. 適応・学習制御

ロボットアームの機能実現による分類

1. プレイバック型ロボット
2. プログラム駆動型ロボット
3. マスタ・スレーブ型ロボット
4. テレオペレータ型ロボット

1.0.2　本講義の構成

ロボット (マニピュレータ) の機構・運動解析と運動方程式の導出
それらを用いた数値シミュレーション

授業内容

1. ロボット工学概論
2. 剛体の運動表現とホモジニアス変換
3. 順運動学と速度変換
4. 変換方程式と逆運動学
5. 可操作性
6. 動力学 (2 リンクスカラマニピュレー タを例として)
7. 安定論
8. PD 制御とパラメータ同定
9. 分解加速度制御と逆動力学計算
10. インピーダンス制御
11. 幾何学的拘束条件付き運動と動的な力と位置のハイブリッド制御
12. 適応制御
13. ニューラルネットワークと学習制御

参考図書

授業のテキストは順次配布しますが, 予習等のため予め入手したい人は下記 Web ページよりダウンロードできます.(pdf 形式又は ps 形式) [一部著作権上の都合上 2 章では図・写真が抜けています.]

http://www.ac.ctrl.titech.ac.jp/ yamakita/text.html

また, 参考図書が欲しい人は下記を推薦します.

1. 有本卓:ロボットの力学と制御：(朝倉書店)
2. M.W.Spong, M.Vidyasagar: Robot Dynamics & Control, Wiley, 1989

第2章　ロボットマニピュレータの機構表現

2.1　代表的なロボットマニピュレータ

ロボットマニピュレータ (ロボットアーム) が自動車工場などで作業をしている様子をニュースなどで見る機会があると思うが、ここではこれから主に扱っていくロボットマニピュレータの具体的イメージを掴むため、代表的なロボットマニピュレータを紹介する。ここで紹介するのは、

1. スタンフォード (Stanford) 型マニピュレータ
2. ピューマ (PUMA) 型マニピュレータ
3. スカラ (SCARA) 型マニピュレータ

である。

スタンフォード型マニピュレータは 1971 にスタンフォード大学で実験用に開発された Stanford Arm を原型とするロボットで Fig. 1 のような概観を持つ。このマニピュレータの特徴として、途中の関節に直動関節を持つことである。

ピューマ型マニピュレータは米国のユニメーション (Unimation) 社が 1978 年に自動車組み立てように開発したもので、Fig. 2 のような概観を持つ。このマニピュレータは全ての関節が回転関節からなっているのが特徴である。このマニピュレータの形状、物理的パラメータが公開されたため、そのパラメータを使って解析、制御系設計の論文が多数執筆されたため、現在でも研究実験用のマニピュレータとして多く使われている。

スカラ型マニピュレータの SCARA は Selective Compliant Articulated Robot for Assembly の略で、その名が示す通り部品組み立て用に開発されたマニピュレータで、Fig. 3 のような概観を持つ。このマニピュレータの特徴は、スタンフォード型マニピュレータ、ピューマ型マニピュレータが 6 関節を有するのに対して、3 関節または、4 関節しか持たない点である。これは、もともと部品の姿勢を考慮しなくとも良い部品組み立て作業用に開発されたためである。

2.2　マニピュレータ機構のシンボリック表現

マニピュレータの運動を解析する際、いちいち機構をリアルに表現していたので大変であり、それが必ずしも機構を直観的に分かり易い形で表現しているとは限らない。そこで、マニピュレータの機構はたは自由度を直観的に分かり易いようにシンボリックに表現される。現在使われているマニピュレータは、剛体のリンクを関節機構でつなぎ合わせたリンク機構から構成されるが、その関節は主に

図 2.1: スタンフォード型マニピュレータ

図 2.2: ピューマ型マニピュレータ

- 回転関節 (Revolutional Joint)
- 直動関節 (Translational Joint)

から構成されている。(これ以外に、ネジのように回転と並進を同時に行う関節も考えられるが、実用にはなっていないようである。) もちろん、実際の関節には自在継手のように、ひとつのジョイントで複数の回転を実現するものもあるが、そのような場合は、仮想的に質量、大きさのないリンクを考えてそれぞれのリンクが回転関節によって継れていると考える。

回転、直動の関節をシンボリックに表現するために、Fig. 4 のような記号を用いる。

2.3 代表的なロボットマニピュレータのシンボリック表現

現在産業用として利用されているロボットマニピュレータの機構は以下の 4 種類に分類される。

- 直交座標ロボット (cartesian coordinates robot)
- 円筒座標ロボット (cylindrical coordinates robot)
- 極座標ロボット (polar coordinates robot)
- 多関節ロボット (articulated robot)

極座標ロボットにはスタンフォード型ロボットが含まれ、多関節ロボットにはピューマ型ロボットが含まれる。また、直交型ロボット、円筒座標ロボットとしては Cincinnati Milacron T^3、GMF M-100 などがある。これらの機構をもつマニピュレータのシンボリックな表現および、マニピュレータの手先が到達できる範囲である作業領域は次のようになる。

図 2.3: スカラ型マニピュレータ

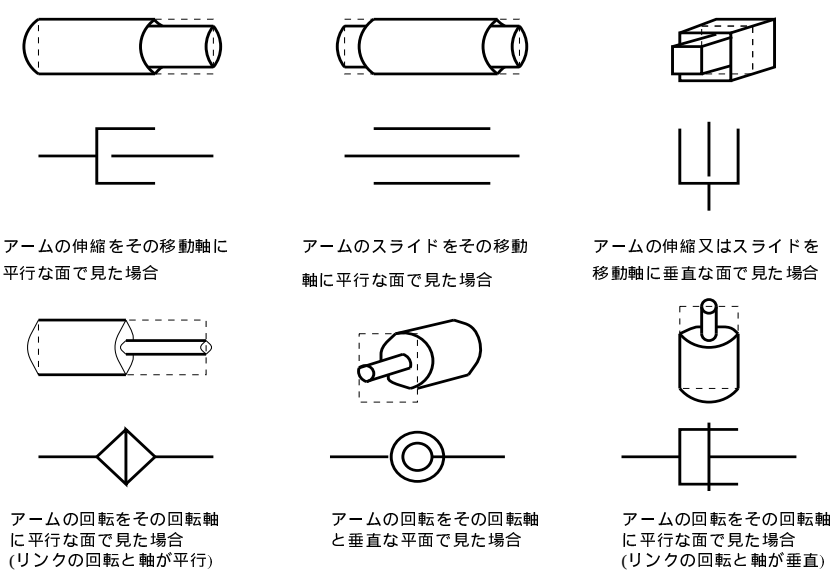

図 2.4: 関節機構のシンボリック表現

図 2.5: マニピュレータの機構とそのシンボリック表現
(ロボットの力学と制御：有本卓 (朝倉書店) より転写)

第3章　剛体の運動とホモジニアス (Homogenious) 変換

複数のリンクからなっているロボットの運動を記述するには、各リンクのを剛体としてそれらの関係を記述すれば良い。剛体の運動を記述するには良く知られたように、 1) 剛体の並進運動 と 2) 回転運動 を記述すれば良い。まず最初に、少し取り扱いが面倒な回転運動から考える。

3.1　回転運動

回転運動を表すには、剛体に取り付けられた直交座標系を考え、その各軸の方向を規定すれば剛体の姿勢が決定できる。ここでは、姿勢を表すのに 3×3 の行列を考えて、その意味するところを考える。

3.1.1　座標変換としての回転変換

今、図 3.1 に示された剛体上に固定された点 p を考える。この点を規定する為には、何らかの座標系を導入する必要があるが、ここでは 2 つの座標系 $0x_0y_0x_0$ と $0x_1y_1z_1$ を用いて一つの点 p をその座標を用いて表現することを考える。ここで、各座標系の単位ベクトル (基底ベクトル) を ($\mathbf{i}_0$, $\mathbf{j}_0$,$\mathbf{k}_0$)、($\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$,$\mathbf{k}_1$) とする。これにより一つの点 p は次の 2 つの表現が出来ることになる。

$$p = {}^0p_x\mathbf{i}_0 + {}^0p_y\mathbf{j}_0 + {}^0p_z\mathbf{k}_0 \tag{3.1}$$

$$p = {}^1p_x\mathbf{i}_1 + {}^1p_y\mathbf{j}_1 + {}^1p_z\mathbf{k}_1 \tag{3.2}$$

これより、 ${}^0p_x$ は p の $\mathbf{i}_0$ 成分であるから $< p, \mathbf{i}_0 >$ でその成分が求まる。つまり、

$$\begin{aligned} {}^0p_x &= < p, \mathbf{i}_0 > = < {}^1p_x\mathbf{i}_1 + {}^1p_y\mathbf{j}_1 + {}^1p_z\mathbf{k}_1, \mathbf{i}_0 > \\ &= < \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_0 > {}^1p_x + < \mathbf{j}_1, \mathbf{i}_0 > {}^1p_y + < \mathbf{k}_1, \mathbf{i}_0 > {}^1p_z \end{aligned} \tag{3.3}$$

同様にして、つぎの方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} {}^0p_x \\ {}^0p_y \\ {}^0p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_0 > & < \mathbf{j}_1, \mathbf{i}_0 > & < \mathbf{k}_1, \mathbf{i}_0 > \\ < \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_0 > & < \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_0 > & < \mathbf{k}_1, \mathbf{j}_0 > \\ < \mathbf{i}_1, \mathbf{k}_0 > & < \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_0 > & < \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0 > \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1p_x \\ {}^1p_y \\ {}^1p_z \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

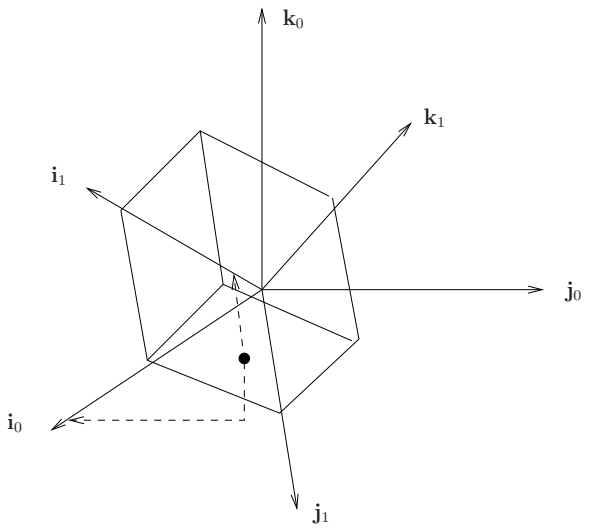

図 3.1: 異なる座標系での表現

従って、

$$ {}^0p := \begin{bmatrix} {}^0p_x \\ {}^0p_y \\ {}^0p_z \end{bmatrix} \tag{3.5} $$

$$ {}^1p := \begin{bmatrix} {}^1p_x \\ {}^1p_y \\ {}^1p_z \end{bmatrix} \tag{3.6} $$

$$ {}^0R_1 := \begin{bmatrix} < \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_0 > & < \mathbf{j}_1, \mathbf{i}_0 > & < \mathbf{k}_1, \mathbf{i}_0 > \\ < \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_0 > & < \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_0 > & < \mathbf{k}_1, \mathbf{j}_0 > \\ < \mathbf{i}_1, \mathbf{k}_0 > & < \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_0 > & < \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0 > \end{bmatrix} \tag{3.7} $$

とすれば、上の式は次のようになる。

$$ {}^0p = {}^0R_1 \ {}^1p \tag{3.8} $$

これより、座標系 $0x_1y_1z_1$ で表現された p の座標 ${}^1p$ を $0x_0y_0z_0$ での座標 ${}^0p$ へ変換する行列が ${}^0R_1$ であることがわかる。逆に、同様の操作を行なうことにより

$$ {}^1p = {}^1R_0 \ {}^0p \tag{3.9} $$

となる行列 ${}^1R_0$ を求めると

$$ {}^1R_0 \;=\; \begin{bmatrix} <\mathbf{i}_0,\mathbf{i}_1> & <\mathbf{j}_0,\mathbf{i}_1> & <\mathbf{k}_0,\mathbf{i}_1> \\ <\mathbf{i}_0,\mathbf{j}_1> & <\mathbf{j}_0,\mathbf{j}_1> & <\mathbf{k}_0,\mathbf{j}_1> \\ <\mathbf{i}_0,\mathbf{k}_1> & <\mathbf{j}_0,\mathbf{k}_1> & <\mathbf{k}_0,\mathbf{k}_1> \end{bmatrix} \tag{3.10} $$

となることがわかる。これより、実数の内積の性質より $<x,y>=<y,x>$ であるから

$$ {}^1R_0 \;=\; ({}^0R_1)^T \tag{3.11} $$

となる。また、

$$ {}^1p \;=\; {}^1R_0\ {}^0p \;=\; ({}^0R_1)^{-1}\ {}^0p \tag{3.12} $$

より

$$ ({}^0R_1)^{-1} \;=\; ({}^0R_1)^T \tag{3.13} $$

であることもわかる。つまり、 ${}^iR_j$ が直交行列であることを示している。ここで、$det({}^0R_1)$ の値は $(\mathbf{i}_1,\mathbf{j}_1,\mathbf{k}_1)$ の取り方によって ±1 をとるが、その det の値が 1 のものを回転行列と呼ぶ。更に、3×3 の回転行列を $SO(3)$(特殊直交群) という。(det が-1 のものは剛体の運動では実現ず、反射変換が必要である。)

この変換の特殊なものとして、$\mathbf{i}_0,\mathbf{j}_0,\mathbf{k}_0$ の回りに θ だけ回転する次の基本回転行列がある。

$$ R_{x,\theta} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \tag{3.14} $$

$$ R_{y,\theta} \;=\; \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix} \tag{3.15} $$

$$ R_{z,\theta} \;=\; \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.16} $$

3.1.2 座標系の表現としての回転行列

今、$0x_1y_1z_1$ 上での x 方向の単位ベクトル $\mathbf{i}_1$ を $0x_0y_0z_0$ で表現すると

$$ {}^0R_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} <\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_0> \\ <\mathbf{i}_1,\mathbf{j}_0> \\ <\mathbf{i}_1,\mathbf{k}_0> \end{bmatrix} \tag{3.17} $$

となり $\mathbf{i}_1$ を $0x_0y_0z_0$ で表現したものとなる。同様に右から $[0,1,0]^T$,$[0,0,1]^T$ を掛けることにより $\mathbf{j}_1,\mathbf{k}_1$ を $0x_0y_0z_0$ で表現したベクトルが得られる。これより、 ${}^0R_1$ が分かれば座標系 $0x_1y_1z_1$ が $0x_0y_0z_0$ に対してどのような姿勢になっているかがわかる。これより、 ${}^0R_1$ は $0x_0y_0z_0$ に対する $0x_1y_1z_1$ の座標系自身を表していると考えることが出来る。

3.1.3　回転変換としての回転行列

今、

$$\mathbf{i}_1 \;=\; {}^0R_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

であるが、これは $\mathbf{i}_0$ を ${}^0R_1$ によって回転した結果が $\mathbf{i}_1$ であると考えることもできる。これより、${}^0R_1$ はベクトルを回転する変換であると見ることもできる。

3.2　連続回転変換

3.2.1　相対変換

前の節の議論より、 ${}^0R_1$ が $0x_0y_0z_0$ をある回転した結果が $0x_1y_1z_1$ であること示していることが分かった。次に、$0x_1y_1z_1$ 座標系でさらに回転した座標系 $0x_2y_2z_2$ を考えその変換を ${}^1R_2$ とする。こうすると, $0x_2y_2z_2$ での p の座標 ${}^2p$ は $0x_1y_1z_1$ では

$${}^1p \;=\; {}^1R_2\ {}^2p \tag{3.19}$$

となる。更に、 ${}^1p$ は $0x_0y_0z_0$ では

$${}^0p \;=\; {}^0R_1\ {}^1p \tag{3.20}$$

であるから、結局

$${}^0p \;=\; {}^0R_1\ {}^1R_2\ {}^2p \;=\; {}^0R_2\ {}^2p \tag{3.21}$$

となる。従って、$0x_0y_0z_0$ に対して ${}^0R_1$ の回転を行ない、$0x_1y_1z_1$ に対して ${}^1R_2$ の回転を行なった座標は

$${}^0R_2 \;=\; {}^0R_1\ {}^1R_2 \tag{3.22}$$

となり、座標系の回転を続けて行なった結果の座標はそれぞれの変換を右から掛けていけば良いことがわかる。このようにして、連続して座標系の回転を考えている時に、元となる座標系をカレント座標系という。例えば、 ${}^0R_1$ を考えている時のカレント座標系は $0x_0y_0z_0$ で、 ${}^1R_2$ の場合は $0x_1y_1z_1$ となる。このように変換された座標系を元にして更なる変換を行なう時は、変換行列の掛け算は右から掛かることになる。

3.2.2　絶対変換

次に、$0x_0y_0z_0$ の点 ${}^0p_0$ を回転行列 ${}^0R_1$ で回転した点を ${}^0p_1$ とすると、

$${}^0p_1 \;=\; {}^0R_1\ {}^0p_0 \tag{3.23}$$

次に、$0x_0y_0z_0$ に関して ${}^0p_1$ を ${}^1R_2$ で回転したものを ${}^0p_2$ とすると

$${}^0p_2 \;=\; {}^1R_2\ {}^0p_1 \;=\; {}^1R_2\ {}^0R_1\ {}^0p_0 \tag{3.24}$$

となる。したがって、結果として回転行列は ${}^1R_2\,{}^0R_1$ となる。いま、${}^0p_0$ を $\mathbf{i}_0$ とすると、${}^1R_2\,{}^0R_1\mathbf{i}_0$ は $0x_0y_0z_0$ で ${}^0R_1$ 回転し、更に $0x_0y_0z_0$ に関して ${}^1R_2$ 回転した後の x_0 軸であると考えることができる。同様に $\mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0$ を考えると、結局 ${}^1R_2\,{}^0R_1$ は $0x_0y_0z_0$ に関して ${}^0R_1$ 回転し、更に $0x_0y_0z_0$ に ${}^1R_2$ 回転して出来る座標系を表していると考えることが出来る。このように連続した座標変換を考える時に、固定した座標系 $0x_0y_0z_0$ を固定座標系と呼ぶ。

ここでのポイントは、考える変換行列が同じでも変換する座標系によって、結果としての行列の掛け算の順番が異なるということである。

変換の種類	演算の種類
相対変換	右からの掛け算
絶対変換	左からの掛け算

3.3 基本的な回転行列

3.3.1 オイラー角を用いた回転行列

次の順番で基本回転行列を用いる変換行列をオイラー角による回転行列という。

$$ {}^0R_1 \;=\; R_{z,\phi}R_{y,\theta}R_{z,\psi} \tag{3.25} $$

3.3.2 ロール・ピッチ・ヨー角を用いた回転行列

船舶、航空機の姿勢を表現する場合に、z_0 の方向を進行方向に取り z_0, y_0, x_0 の回りの回転をそれぞれ、ロール角、ピッチ角、ヨー角と呼びそれらを使う場合が多い。次の順番で基本回転行列を用いる変換行列をロール・ピッチ・ヨー角による回転行列という。

$$ {}^0R_1 \;=\; R_{z,\phi}R_{y,\theta}R_{x,\psi} \tag{3.26} $$

3.3.3 任意の軸回りの回転

単位ベクトル k で表された軸の回りの回転は、図 3.2 のように回転角 α, β を取ると、変換行列は次の行列になる。

$$ R_{k,\theta} \;=\; R_{z,\alpha}R_{y,\beta}R_{z,\theta}R_{y,-\beta}R_{z,-\alpha} \tag{3.27} $$

ただし、

$$ \begin{aligned} sin\alpha &= \frac{f_y}{\sqrt{k_x^2+k_y^2}} \\ sin\beta &= \sqrt{k_x^2+k_y^2} \end{aligned} $$

この表現の場合、パラメータとして 4 つのものをもつが、それらは完全には独立ではない。なぜなら、$\|k\| = 1$ という制約を持っているからである。

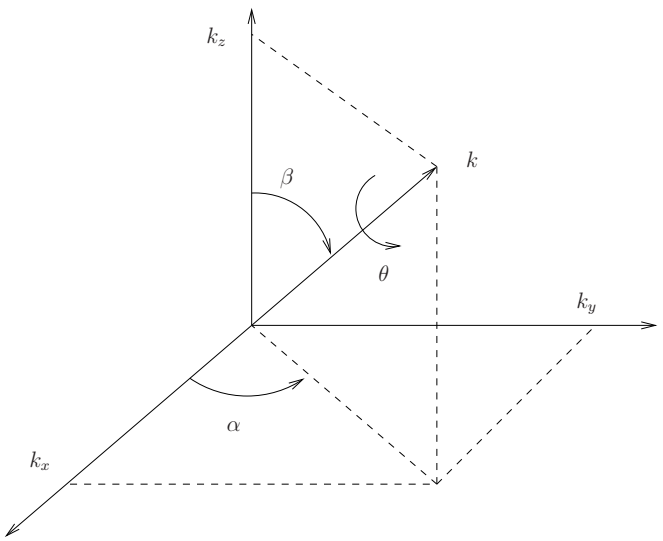

図 3.2: k 軸回りの回転行列

3.3.4　オイラーパラメータ表現

同じ 4 四つのパラメータを持つ表現として、オイラパラメータ $(\epsilon \in R^3, \eta \in R)$ を用いたものがある。このパラメータ表現は前の回転軸、回転角のパラメータを用いると、つぎの様な関係がある。

$$\epsilon = ksin\frac{\phi}{2} \tag{3.28}$$

$$\eta = cos\frac{\phi}{2}, \quad k \in R^3, \quad \phi \in R \tag{3.29}$$

また、回転行列 R が

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}.$$

で与えられるとき、

$$\eta = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}} \tag{3.30}$$

$$\epsilon = \frac{1}{4\eta}\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}, (\epsilon^T\epsilon + \eta^2 = 1). \tag{3.31}$$

のように簡単に計算できる。また、逆に (ϵ, η) から R は

$$R = (\eta^2 - \|\epsilon\|^2)I + 2\epsilon\epsilon^T + 2\eta S(\epsilon) \tag{3.32}$$

この場合も、パラメータは 4 つあるが、

$$\|\epsilon\|^2 + \eta^2 = 1$$

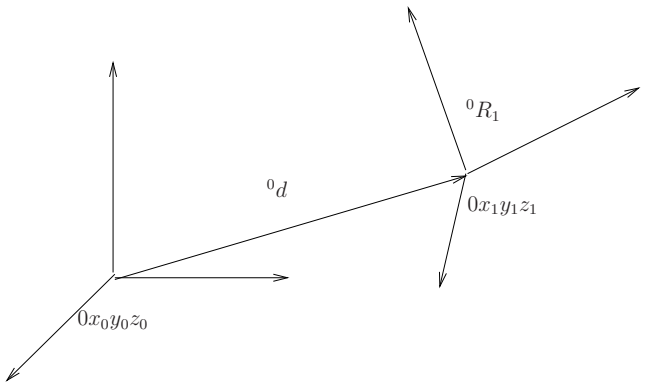

図 3.3: 並進と回転を伴う変換

という制約があるため、それらか独立でない。これらの 4 つのパラメータを用いたものは、計算が簡単というメリット以外に、表現上の特異姿勢を回避できるという利点がある。これに関しては速度変換のところでさらに詳しく議論する。また、ここで重要なことは、どのパラメータ表現を使おうとも、それらのパラメータで表現されたものはベクトル量ではないということである。これが、並進運動と回転の取扱を区別しなければならない本質的な要因である。

3.4 同次変換 (Homogenious Transformation)

一般の座標系の変換を考える際、今まで考えてきた回転行列だけではなくて、原点の並進移動も考えなければならない。いま、$0x_0y_0z_0$ を ${}^0R_1$ で回転し、${}^0d$ で並進移動した座標系 $0x_1y_1z_1$ を考えると、変換された後の座標系での点 ${}^1p$ は $0x_0y_0z_0$ では

$$ {}^0p \;=\; {}^0R_1\ {}^1p \;+\; {}^0d \tag{3.33} $$

となる。また、$0x_1y_1z_1$ を ${}^1R_2$ で回転し、${}^1d$ で並進移動した座標系 $0x_2y_2z_2$ を考えると、その座標系で表現された ${}^2p$ は $0x_1y_1z_1$ では

$$ {}^1p \;=\; {}^1R_2\ {}^2p \;+\; {}^1d \tag{3.34} $$

である。従って、

$$ {}^0p \;=\; {}^0R_1({}^1R_2\ {}^2p \;+\; {}^1d) \;+\; {}^0d \;=\; {}^0R_1\ {}^1R_2\ {}^2p \;+\; {}^0R_1\ {}^1d \;+\; {}^0d \tag{3.35} $$

となる。よって、この座標系は $0x_0y_0z_0$ に関して ${}^0R_1\ {}^1R_2$ の回転を施し、${}^0R_1\ {}^1d \;+\; {}^0d$ の並進運動をしたものであることがわかる。しかし、この演算は回転変換がただの行列の積で表現された

ようには簡単ではない。そこで次の行列を考える。

$$ {}^0H_1 \;=\; \begin{bmatrix} {}^0R_1 & {}^0d \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \tag{3.36} $$

$$ {}^1H_2 \;=\; \begin{bmatrix} {}^1R_2 & {}^1d \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \tag{3.37} $$

これより、

$$ {}^0H_1\ {}^1H_2 = \begin{bmatrix} {}^0R_1\ {}^1R_2 & {}^0R_1\ {}^1d\ +\ {}^0d \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \tag{3.38} $$

となり、左上の部分を姿勢、その右の部分が位置を表していると考えることができる。このように、姿勢と位置を上の行列のように表現したものを同次変換行列と呼ぶ。また、H を次のように表すと、

$$ H \;=\; \begin{bmatrix} R & d \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \tag{3.39} $$

R が直交行列であることから、H の逆行列は次のように簡単に計算される。

$$ H^{-1} \;=\; \begin{bmatrix} R^T & -R^T d \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \tag{3.40} $$

この行列は座標系自身を表していると考えられるが、回転行列と同じようにベクトルの変換を表していると考えられる。しかし、点のベクトルが 3 次元であるのに対して、H は 4 次の正方行列であるのでそのままでは積を計算することができない。そこで、p に対して次の P を考え、

$$ P \;:=\; \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.41} $$

これが点 (3 次元ベクトル) を表していると考える。このようにすると、今まで回転行列に関して考えていたことが、並進・回転を同時に表現でき、変換が行列の積として簡単に表現できるようになる。この行列 H は回転行列のところでみたように、やはり 3 通りの解釈ができることに注意する。

3.5　歪対称行列・外積と回転行列

[歪対称行列] 次の等式を満たす行列を歪対称行列と呼ぶ。

$$ S^T \;+\; S \;=\; 0 \quad\rightarrow\quad s_{ij} \;=\; -\,s_{ji} \tag{3.42} $$

S が 3×3 であるとき、次のように表現することができる。

$$ S \;=\; \begin{bmatrix} 0 & -s_1 & s_2 \\ s_1 & 0 & -s_3 \\ -s_2 & s_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.43} $$

また、S が 3 次元ベクトル a でパラメタライズされる時には次のように表現する。

$$S(a) \ := \ \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}, \quad a \ := \ \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

この $S(a)$ を用いると a と b の外積 $a \times b$ は次のように表現できる。

$$a \times b \ = \ \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} b \ = \ S(a)b \tag{3.45}$$

つまり、$S(a)$ は $a\times$ の行列表現と考えることができる。

3.5.1 $R(\theta)$ の θ に関する微小変化

回転行列がパラメータ θ を持つ時、この θ の微小変化に対して行列の変化がどうなるか考えて見よう。今、R が直交行列であるから

$$R(\theta)R^T(\theta) \ = \ I \tag{3.46}$$

これを θ で両辺を微分して、

$$\frac{dR}{d\theta}R^T \ + \ R\frac{dR^T}{d\theta} \ = \ 0 \tag{3.47}$$

今、

$$S \ := \ \frac{dR}{d\theta}R^T \tag{3.48}$$

と定義すると、

$$S \ + \ S^T \ = \ 0 \tag{3.49}$$

であることがわかる。また、この S を用いて

$$\frac{dR}{d\theta} \ = \ SR \tag{3.50}$$

と書ける。また、θ が時間の関数である時には、

$$\frac{dR}{dt} \ = \ \frac{\partial R}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt} \ = \ S\frac{d\theta}{dt}R \tag{3.51}$$

となり、$S\frac{d\theta}{dt}$ を $\omega\times$ とすると

$$\frac{dR}{dt} \ = \ \omega \times R \tag{3.52}$$

となり、重要な関係式が導かれる。この ω を R の時間変化に対応した角速度ベクトルという。これより、原点を中心に回転する座標系 ${}^0R_1$ で表現されたベクトル ${}^1r$ の $0x_0y_0z_0$ での時間微分は

$$\frac{d\ {}^0r}{dt} \ = \ \frac{d\ {}^0R_1\ {}^1r}{dt} \ = \ \omega \times \ {}^0r \ + \ {}^0R_1\ {}^1\dot{r} \tag{3.53}$$

という良く知られた関係が導かれる。また、その定義から明らかなように、

$$\omega_1 \times + \omega_2\times = (\omega_1 + \omega_2)\times \tag{3.54}$$

である。

3.5.2　回転行列の幾つかの性質

外積と回転変換に関しては次の重要な等号がなり立つ。

$$R(a \times b) \;=\; (Ra) \times (Rb) \tag{3.55}$$

これは、距離と力の外積つまり、モーメントが座標系を変えて計算しても本質的にその物理量は変化しないことからも分かる。(確かめて見よ)

つぎの等号を考える。ただし、$S(a)$ は $a\times$ の演算の行列表現である。(以後、$a\times$ を外積の行列表現として用いることもある。)

$$RS(a)R^T b \;=\; R(a\times)R^T b \;=\; (Ra) \times (RR^T b) \;=\; (Ra) \times b \;=\; S(Ra)b \tag{3.56}$$

2 番目の等号は上述の回転行列の積と外積の入れ替えの規則を用いた。これより、

$$RS(a)R^T \;=\; S(Ra) \tag{3.57}$$

であることがわかる。これは、a を座表変換した後の外積は、もとの座標での外積行列を相似変換したものであることを示している。この関係は外積の行列表現を用いると次のようになる。

$$R(a\times)R^T = (Ra)\times$$

3.5.3　数学的準備

以降の章で必要となる、回転行列以外の行列に関する性質を列挙しておく。

[トレースの性質] 行列 A、B に対して、正方行列 AB, あるいは BA が定義できるとき、

$$tr(AB) = tr(AB) \tag{3.58}$$

である。ただし、正方行列 $M = [m_{ij}] \in R^{n\times n}$ のトレース $tr(M)$ は次のように定義される。

$$tr(M) := \sum_{n=1}^{n} m_{ii} \tag{3.59}$$

特に、v が $n \times 1$ のベクトルであるとき、

$$\|v\|^2 = v^T v = tr(v^T v) = tr(vv^T) \tag{3.60}$$

が成立する。

[行列式の性質] 良く知られたように、正方行列 A, B に対して、

$$det(AB) = det(A)det(B) \tag{3.61}$$

が成り立つ。

[行列の特異値] 任意の行列 $M \in C^{m\times n}$ について、$rank(M) = r$ で、準正定行列 M^*M の固有値を $\lambda_1 \geq \lambda_2, \cdots, \lambda_r, \lambda_{r+1} = 0, \cdots, \lambda_n = 0$ とする。このとき、あるユニタリ行列 $U \in C^{m\times m}, V^{n\times n}$ があり、

$$M = U\Sigma V^*, \quad \Sigma := \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{3.62}$$

と分解できる。これを行列 M の特異値分解という。ただし、ユニタリ行列とは $U^*U = I$ となる行列であり、* は共役転置である。また、$\sigma_i := \sqrt{\lambda_i}$ であり、特異値と呼ばれる。また、σ_1 を最大特異値 $(\bar{\sigma})$、σ_r を最小特異値 $(\underline{\sigma})$ と呼ぶ。

行列 M が実行列の場合には、* を転置 ^{T} に置き換えればよい。また、簡単な計算より、$y = Mx,\ x \in C^n, y \in C^m$ とするとき、

$$\max_{\|x\|\leq 1} \|y\| = \sigma_1 \tag{3.63}$$

となる。

さらに、M が実行列の場合、次の 2 次形式で評価される領域を考え、

$$x^T M^T M x \leq 1 \tag{3.64}$$

新しい座標として、

$$x = Vy \tag{3.65}$$

なる y を導入すると、

$$x^T M^T M x = y^T \Sigma^2 y \leq 1 \tag{3.66}$$

となり、ベクトル y の各要素を y_i とすると、この条件は

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 y_i^2 \leq 1 \tag{3.67}$$

となる。この領域は、V の各列を主軸とし、半径が $1/\sigma_i$ となる楕円体の周及び内部である。

[スカラ関数のベクトルによる微分] ベクトル $x = [x_1, \cdots, x_n]^T \in R^n$ から実数値への関数 $f(x)$ のベクトル x による微分を

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} := \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1 1}, \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right] \tag{3.68}$$

により定義する。これより、M を対称行列とすると、

$$\frac{1}{2}\frac{\partial x^T M x}{\partial x} = x^T M \tag{3.69}$$

が成り立つ。また、係数を縦に並べたものを $\frac{\partial f(x)}{\partial x^T}$ と書く場合もある。

第4章　順運動学と速度変換

座標系の表現とその演算手法については前章で詳しく述べたので、ここではロボットアームの位置と姿勢を表現する方法について考える。本章では、簡単の為にジョイントが直列的に配置されたロボットアームについてのみ考え、平行リンクを含む複雑なリンク機構を持ったものは考えない。また、各ジョイントは次のような、

回転型のジョイン
直動型のジョイント

でその状態の記述が一つの変数で記述出来るものを考える。実際にハード的に構成される関節としては、自在継ぎ手などの多くの自由度を持っているものも存在するが、これらは仮想的なジョイントが直列的に継って構成されているものとみなすことが出来るので、ここでの手法は一般的なジョイントに適用できる。これに従って、ジョイントにはそれに対応したリンクが付随するものと考え、ジョイントの i 番目にはリンク i が対応するものとする。

4.1　順運動学

上で述べたようにジョイントの値は一つの実数で記述出来ることになるが、これらの値を回転型、直動型によらず i 番目のものを q_i で表現する。順運動学は、n 個のリンク (一般には n は 6) からなる q_i $(i = 1, \cdots, n)$ の値に対して、手先の位置・姿勢がどのようになるかを決定することである。q_i を関節座標と言い、手先の作業に適した座標での表記を作業座標という。従って、順運動学は関節座標と作業座標の変換である。ただ、一般には作業座標はデカルト座標系の位置と適当な姿勢角度 (オイラー角など) で表されるが、ここでは姿勢は姿勢行列を考えるものとする。

各リンクは剛体であると考えるので、その剛体の位置と姿勢を表現するためにそれぞれのリンク i に張り付いた座標系 O_i を考える。また、ロボットアームは地面に固定されているとして、地面を表す基準座標系を O_0 として考え、絶対座標またはベース座標と呼ぶ。また、最終リンクつまり n 番目のリンクのことを、手先のリンクまたは最終効果器 (End-Effector) と呼ぶ。各ジョイントは一般的にそのジョイントの値は一つ前のリンクに対して相対的に決まる。例えば、回転ジョイントの場合には前のリンクのある軸周りの回転量となる。従って、ジョイント i の値が変化することによって、リンク i を表す座標系は q_i を変数とする同次変換行列

$$A_i(q_i) \ := \ H(q_i) \ = \ \begin{bmatrix} {}^{i-1}R_i & {}^{i-1}d_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

によって表されることになる。(リンク間相対変化を表す同時変換行列は習慣的に A を用いる。) 従って、リンク j の座標系をリンク i $(j > i)$ の座標系で表現したものは、各リンクの変換が相対

変換であることより

$$ {}^iT_j \ := \ A_i A_{i+1} \cdots A_j \ = \ \begin{bmatrix} {}^iR_j & {}^id_j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.2} $$

によって表される。この ${}^iT\ j$ を変換行列と呼ぶ。もちろん、前章の結果より、

$$ {}^iT_i \ = \ I_4 \tag{4.3} $$

$$ {}^jT_i \ = \ ({}^iT_j)^{-1} \ \ (j \ > \ i) \tag{4.4} $$

である。また、${}^iT_j$ の中身は、

$$ {}^iR_j \ = \ {}^iR_{i+1} \cdots \ {}^{j-1}R_j \tag{4.5} $$

$$ {}^id_j \ = \ {}^id_{j-1} \ + \ {}^iR_{j-1} \ {}^{j-1}d_j \tag{4.6} $$

と書くことが出来る。この変換行列の表現を用いると、今考えている順運動学の問題は

$$ {}^0T_n(q_1, \cdots, q_n) \tag{4.7} $$

を求める問題となる。ここで、${}^0T_n$ の姿勢行列を習慣にしたがって、次のように表記する事がある。

$$ {}^0R_n \ = \ [n|s|a] \tag{4.8} $$

これは、a 方向に最終効果器を接近 (approach) する方向に取り、s はその横滑べり (sliding) 方向に取る場合が多いからである。

4.1.1　DH(Denavit-Hartenberg) 表記法

一般に A_i は位置の変化と姿勢の変化を表す 6 個のパラメータを指定すれば計算出来ることは前章で見た。ここでは、座標系の取り方を工夫することによりパラメータを 4 個に減らすことができることを示す。この 4 つに減らしたパラメータによって A_i を表現することを DH 表記法といい、次のように計算する。

$$ \begin{aligned} A_i \ &= \ Rot_{z,\theta_i} Trans_{z,d_i} Trans_{x,a_i} Rot_{x,\alpha_i} \\ &= \ \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.9} $$

ここで、$Trans_{a,b}$ は指定された a 方向に b だけ並進移動することを意味している。このように表現した際のそれぞれのパラメータは、リンク i に関して次のように呼ばれる。

パラメータ	呼び名
θ_i	回転角
d_i	オフセット
a_i	長さ
α_i	ねじれ角

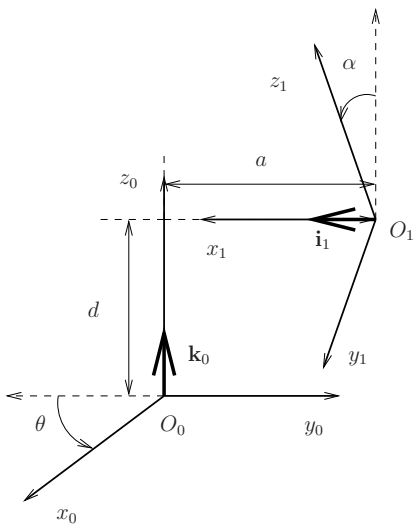

図 4.1: DH 表記法のパラメータ

次にある仮定を設けることによって座標系の変換が 4 つパラメータによって表現できることを示そう。そのために図 4.1 に示される 2 つの座標系 O_0 と O_1 を考える。ここで、次の 2 つの仮定を設定する。

DH1 軸 x_1 は z_0 軸に垂直である。

DH2 軸 x_1 は z_0 軸と交わる。

この仮定の下で、座標系の変換行列が 4 つのパラメータを用いて、

$$A \;=\; Rot_{z,\theta}Trans_{z,d}Trans_{x,a}Rot_{x,\alpha} \tag{4.10}$$

と表されることを示そう。同次変換行列 A は

$$A = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \;\; R \;:=\; [r_1|r_2|r_3] \tag{4.11}$$

と表される。DH1 のについて考えると、x_1 は r_1 であるから、z_0 の方向 $k_0 = [0,0,1]^T$ と r_1 が直交していることを意味している。これより、r_{13} はゼロでなければならないことが分かる。これより、R が回転行列であるため、各行又は列の要素の自乗和は 1 であるから適当なパラメータ θ, α を用いて次のように表現される。

$$R \;=\; \begin{bmatrix} c_\theta & * & * \\ s_\theta & * & * \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

また、R の逆行列がそれ自身の転置であることより、$*$ が次のように求まる。

$$R \;=\; \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta c_\alpha & s_\theta s_\alpha \\ s_\theta & c_\theta c_\alpha & -c_\theta s_\alpha \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha \end{bmatrix} \;=\; Rot_{z,\theta}Rot_{x,\alpha} \tag{4.13}$$

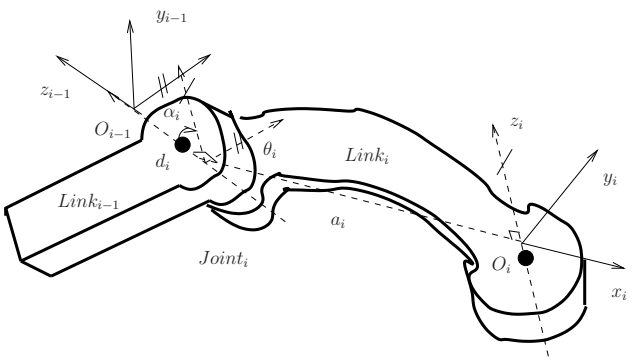

図 4.2: リンク $i-1$ とリンク i 間の DH パラメータの物理的意味

また、並進部分に関しては、図より

$$ {}^0d_1 \;=\; d\mathbf{k}_0 \;+\; aR\mathbf{i}_1 \;=\; d\mathbf{k}_0 \;+\; ar_1 \;=\; \begin{bmatrix} ac_\theta \\ as_\theta \\ d \end{bmatrix} \tag{4.14} $$

となり、A_i と同じ表現となる。

このパラメータを用いて、n リンクマニピュレータの順運動学を記述出来る。ただし、この場合先の条件は次のものとなる。

DH1 軸 x_i は z_{i-1} 軸に垂直である。

DH2 軸 x_i は z_{i-1} 軸と交わる。

ただし、この表記法ではジョイント i の回転軸と座標系 O_i の座標軸とは一般に一致せず、ジョイント $i+1$ 軸上に存在することになる。また、q_i はジョイントの型によって次のようになり、

ジョイントの型	q_i に対応する変数
回転型	θ_i
直動型	d_i

その値は、z_{i-1} 軸周りの量になる。具体的な例を示す為に、図 4.2 で表されるリンク i とリンク $i+1$ を考える。このリンク系はリンク $i-1$ とリンク i の間が回転ジョイントによって結合されている。まずジョイント i の正の回転方向に z_{i-1} をとる。座標系 O_{i-1} がジョイント i 上に図のように取られているとする。(リンク i の運動と同時に動くことに注意) 条件 DH1 と条件 DH2 より、x_i は z_{i-1} と z_i の共通垂線にならなければならないため、x_i の方向と座標系 O_i が図のように決まる。これによって、DH 表記法でのパラメータは図中に示される値となる。

以上は、z_{i-1} と z_i の間に共通垂線が取れる場合には適用できるが、一般の場合には共通垂線が存在しない場合も存在する。一般の場合を含めたリンク座標系の設定を次に要約しておく。

1. ジョイント i の正の方向に z_{i-1} を設定する。

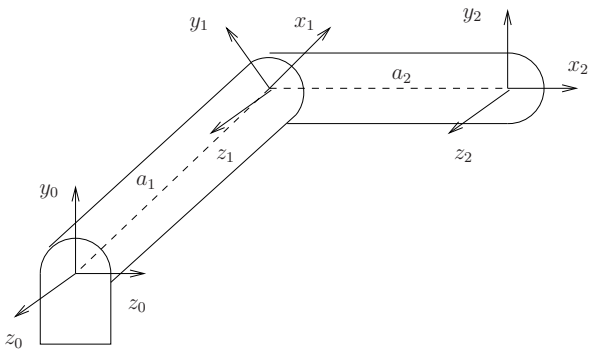

図 4.3: 平面 2 リンクマニピュレータの順運動学

2. ベース座標系の原点を z_0 上の適当な所に取る。

3. z_{i-1} と z_i が共通垂線を持つ場合には、z_i 軸上に O_i を取る。z_{i-1} と z_i が交差するなら、交点に O_i をとり、z_{i-1} と z_i が平行の場合には O_i をジョイント i 軸上の適当なところに取る。

4. x_i を O_i を通り、z_{i-1} と z_i の両方に垂直となるように取る。もし、z_{i-1} と z_i が直交するなら、z_{i-1} と z_i のなす平面に垂直に取る。

5. 各座標系が右手座標系となるように y_i を設定する。

6. $\mathbf{k}_n$ が最終効果器の接近方向、$\mathbf{j}_n$ が滑べり方向となるようになるように設定し、O_n は効果器の中心に置く。また、y_n は右手座標系となるように設定する。

7. 設定された座標系から DH パラメータを決定する。この際、ジョイント i が回転型なら、θ_i が変数に、直動型なら d_i が変数になることに注意する。

8. DH パラメータから A_i を計算する。

9. $A_1 \cdots A_n$ を計算し、 ${}^0T_n$ を得る。

4.1.2 2 リンクマニピュレータの場合

今、図 4.3 のような 2 リンクの水平リンクマニピュレータを考える。

ベース座標系を図のようにとると、変換行列を簡単にする為に $d_1 = 0$ と選ぶ方が良いので O_1 の位置が決定される。また、O_2 はアームの先端に取る為に図のように決定する。これらの関係から、このマニピュレータの DH パラメータは次のようになる。

表 4.1: 水平マニピュレータの DH パラメータ

Link No.	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	*
2	a_2	0	0	*

これより、変換行列は

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

$$\tag{4.17}$$

となるので、手先への変換行列 ${}^0T_2$ はつぎのように求まる。

$${}^0T_2 = A_1A_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

4.2　変換方程式

今、マニピュレータと移動車の上に載っている作業対象である箱が図 4.4 のように配置されているとする。ここで、Cart は絶対座標系で表した移動車の状態を表す同次変換行列で、Work は Cart 座表系で表した箱の状態を表した同次変換行列である。また、Base は絶対座標系で表したマニピュレータのベースの位置と姿勢を表す同次座標変換、Manipulator はベース座標系で表したマニピュレータの手先の状態を表す同次座標変換である。このような関係にある時、マニピュレータの手先座標系で表した箱の座標系がどのように見えるかを考えて見よう。(つまり、手先に取り付けた座標系での、箱の座標系の表現を得ること。) 今これを $\Delta Work$ と表すとすると、次の関係が成り立たなければならないことが分かる。

$$CartWork = BaseManipulator\Delta Work \tag{4.19}$$

このような方程式を変換方程式という。それぞれの同次座標変換は逆行列を持つので、求める座標変換は

$$\Delta Work = Manipulator^{-1}Base^{-1}CartWork \tag{4.20}$$

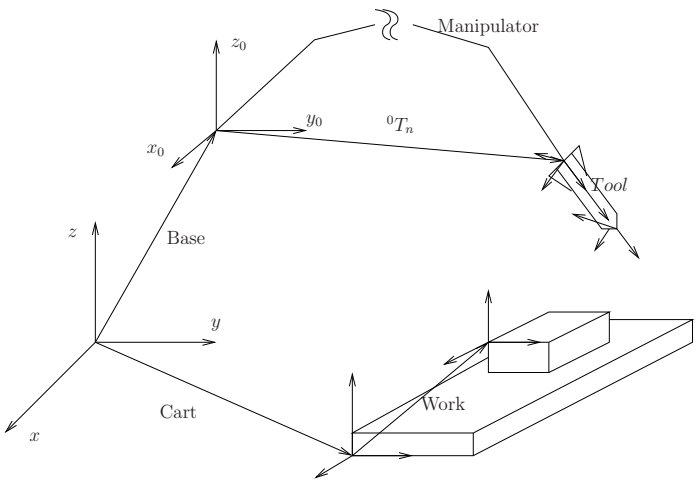

図 4.4: 同次変換方程式の応用

というように形式的に計算することができる。このように位置と姿勢の関係を簡単に求めることができることが同次座標変換表現した利点の一つである。

4.3 速度変換

今まで考えてきた順運動学は q_i に対して手先の位置と姿勢がどのようになるかを計算するものであった。しかし、実際の応用では $\dot{q}_i$ に対して手先の並進速度と角速度がどのようになるかを必要になる場合がある。これらの変換は位置の関係の場合よりも簡単に、マニピュレータ・ヤコビヤンというもので簡単に表現できる。

4.3.1 マニピュレータ・ヤコビヤン

今、手先の変換行列を

$$ {}^0T_n \;=\; \begin{bmatrix} {}^0R_n & {}^0d_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.21} $$

によって表されるとする。これより、並進速度 ${}^0v_n$ は

$$ {}^0v_n \;=\; {}^0\dot{d}_n \tag{4.22} $$

で表され、角速度 ${}^0\omega_n$ に関しては前章の結果より

$$ S({}^0\omega_n) \;=\; {}^0\dot{R}_n({}^0R_n)^T \tag{4.23} $$

によって求まる。しかし、これでは $\dot{q}_i$ との関係が明白ではないが、実は次のような表現が可能である。

$$ {}^0v_n = J_v\dot{q} \tag{4.24} $$

$$ {}^0\omega_n = J_\omega\dot{q} \tag{4.25} $$

これをまとめて、

$$ \begin{bmatrix} {}^0v_n \\ {}^0\omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} \dot{q} =: {}^0J_n\dot{q} \tag{4.26} $$

と表し、 ${}^0J_n$ をマニピュレータ・ヤコビヤンと呼ぶ。

4.3.2　回転角速度

DH 表記法より q_i が回転角である場合には、その回転による角速度は $i-1$ 座標系では

$$ {}^{i-1}\omega_i = \mathbf{k}\dot{q}_i \tag{4.27} $$

に見える。従って、絶対座標系では

$$ \omega_i = {}^0R_{i-1}\,{}^{i-1}\omega_i = {}^0R_{i-1}\,{}^{i-1}\mathbf{k}\dot{q}_i = z_{i-1}\dot{q}_i \tag{4.28} $$

となる。回転角速度はそれぞれのジョイントの角速度の和になるから

$$ {}^0\omega_n = [\rho_0 z_0 \;\; \rho_1 z_1 \;\; \cdots \;\; \rho_{n-1}z_{n-1}]\dot{q} \tag{4.29} $$

として表される。但し、ρ_i はジョイント i が回転ジョイントである場合に 1 となりそうでない場合は 0 となるものである。

4.3.3　並進速度

ジョイント i が直動型である場合には、

$$ {}^{i-1}d_i = d_i\mathbf{k} + {}^{i-1}R_i a_i\mathbf{i} \tag{4.30} $$

であるから,

$$ {}^0d_n = {}^0d_i + {}^0R_i\,{}^id_{i+1} + \cdots \tag{4.31} $$

となり、$q_i = d_i$ 以外が変化しないとすると

$$ {}^0\dot{d}_n = \dot{d}_i\,{}^0R_{i-1}\mathbf{k} = z_{i-1}\dot{d}_i \tag{4.32} $$

従って、

$$ \frac{\partial\,{}^0\dot{d}_n}{\partial\dot{q}_i} = z_{i-1} \tag{4.33} $$

次に、ジョイント i が回転型である場合は

$$ {}^0d_n \;=\; {}^0d_{i-1} \;+\; {}^0R_{i-1}\,{}^{i-1}d_n \tag{4.34} $$

である。今、表記を簡単にする為に ${}^0d_k$ を o_k と表すと上の式は次のものになる。

$$ o_n \;-\; o_{i-1} \;=\; {}^0R_{i-1}\,{}^{i-1}d_n \tag{4.35} $$

今、q_i だけが変化するとすると $o_{i-1},\ {}^0R_{i-1}$ は q_i の変数ではないので、上の式を微分すると

$$ {}^0\dot{d}_n \;=\; {}^0R_{i-1}\,{}^{i-1}\dot{d}_n \tag{4.36} $$

を得る。一方、$i-1$ 座標系で見た ${}^{i-1}\dot{d}_n$ は $\mathbf{k}$ 回りの回転であるから、

$$ {}^{i-1}\dot{d}_n \;=\; \dot{q}_i\mathbf{k}\times\ {}^{i-1}d_n \tag{4.37} $$

と表される。従って、この関係と (4.35) の関係を用いベース座標系に変換すると次のようになる。

$$ \begin{aligned} {}^0\dot{d}_n \;&=\; {}^0R_{i-1}\dot{q}_i\mathbf{k}\times\ {}^{i-1}d_n \\ &=\; \dot{q}_i(\ {}^0R_{i-1}\mathbf{k})\times(\ {}^0R_{i-1}\,{}^{i-1}d_n) \\ &=\; \dot{q}_i z_{i-1}\times(o_n\ -\ o_{i-1}) \end{aligned} \tag{4.38} $$

従って、

$$ \frac{\partial\ {}^0\dot{d}_n}{\partial\dot{q}_i} \;=\; z_{i-1}\times(o_n\ -\ o_{i-1}) \tag{4.39} $$

となる。

上記の導出より、

$$ {}^0J_n \;=\; [J_1\ \ J_2\ \ \cdots\ \ J_n] \tag{4.40} $$

とすると、J_i はジョイント i が回転型である場合には

$$ J_i \;=\; \begin{bmatrix} z_{i-1}\times(o_n\ -\ o_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} \tag{4.41} $$

となる。また、直動型の場合には

$$ J_i \;=\; \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.42} $$

となる。

4.3.4 加速度関係

加速度関係は速度関係より形式的に求めることができる。以後は簡単のため、

$$ J \;:=\; {}^0J_n \tag{4.43} $$

$$ \dot{x} \;:=\; \begin{bmatrix} {}^0v_n \\ {}^0\omega_n \end{bmatrix} \tag{4.44} $$

とする。これより、前節の関係は

$$\dot{x} = J\dot{q} \tag{4.45}$$

となる。従って、加速度関係を計算するには、形式的に上式を微分することにより

$$\ddot{x} = J\ddot{q} + \dot{J}\dot{q} \tag{4.46}$$

として得られる。

4.4　速度関係より導かれるマニピュレータの機構性能評価

ロボットマニピュレータの制御を考える場合、一般に制御したいものはマニピュレータの手先の位置と姿勢であり、各関節の値ではない。各関節の速度や加速度はそこに取り付けられているモータの性能に依存するだけであり、原理的にはマニピュレータの機構には無関係である。そこで、各関節に取り付けられたモータの特性は一定として、どのような機構を用いれば手先の位置と姿勢を制御し易くなるかを考える。又は、作業をどの姿勢で行えば効率的であるかを考える。これを評価するものに次の 2 つのが代表的なものとして知られている。

1. 可操作性
2. 確率的可操作性

これらはロボットの機構をスカラーの指標で評価しようとしたものであり、次のように定義されている。

4.4.1　可操作性

速度関係より、関節での速度と手先での速度の関係は以下のように与えられる。

$$\dot{x} = J\dot{q} \tag{4.47}$$

ただし、ここでは手先での自由度よりも関節での自由度の方が大きいか等しい場合を考える。つまり、

$$n \geq m, \quad x \in R^m, \; q \in R^n$$

であるとする。これより、行列 J は正方または横長の行列となる。

ここで考える指標は、$\dot{q}$ が偏りがなくノルムの意味で

$$\|\dot{q}\| \leq 1 \tag{4.48}$$

という制約を受けるとき、手先での速度のノルムができるだけ' 大きい' 方が機構的に優れているという考え方に基づいている。速度の関係式より、手先での $\dot{x}$ を実現する関節での速度 $\dot{q}$ は次式で表される。

$$\dot{q} = J^{\dagger}\dot{x} + \eta \tag{4.49}$$

ただし、$J^{\dagger}$ は疑似逆行列であり、η は J の零空間の成分であり次式で与えられる。

$$J^{\dagger} := J^T(JJ^T)^{-1} \tag{4.50}$$

$$\eta := (I - J^{\dagger}J)\xi, \quad for\ \forall \xi \in R^m \tag{4.51}$$

この関係式を (4.48) に代入し、

$$J^{\dagger T}(I - J^{\dagger}J) = 0 \tag{4.52}$$

の関係を利用すると、

$$\|\dot{q}\|^2 = (J^{\dagger}\dot{x} + \eta)^T(J^{\dagger}\dot{x} + \eta) \tag{4.53}$$

$$= \|J^{\dagger}\dot{x}\|^2 + \|\eta\|^2 \tag{4.54}$$

の関係を得る。いま、$\dot{x}$ の領域は大きい方が良いので、$\eta = 0$ とすると

$$\|J^{\dagger}\|^2 = \dot{x}^T(JJ^T)^{-1}JJ^T(JJ^T)^{-1} \tag{4.55}$$

$$= \dot{x}^T(JJ^T)^{-1}\dot{x} \leq 1 \tag{4.56}$$

という $\dot{x}$ に関する関係式が得られる。ここでこの式を $\dot{x}$ に関する 2 次形式と考えると JJ^T が逆行列を持つ範囲で考えると、$(JJ)^{-1}$ の特異値は JJ^T の特異値の逆数になるので、この 2 次形式で制約される領域の大きさは $det(JJ^T)$ に比例することになる。そこで、マニピュレータの姿勢 q での可操作性 $m(q)$ を

$$m(q) := \sqrt{det(J(q)J(q)^T)} = \prod \sigma_i \tag{4.57}$$

で定義する。ただし、σ_i は J の特異値である。また、$\dot{x}^T(JJ^T)^{-1}\dot{x}$ で表される楕円体を可操作楕円体という。例えば、 2 リンクの平面マニピュレータの場合には、可操作楕円体の姿勢の変化による関係は図??のようになる。もし、各関節に出せる最大の速度にバラツキがある場合には、評価関数に対角重み行列 W を導入し、

$$\dot{x}^T W\dot{x} \leq 1 \tag{4.58}$$

から式変形を考えればよい。ただし、W の対角要素は、最大速度が小さい関節ほど大きな値を取る。

4.4.2 確率的可操作性

前節で与えた可操作性には、手先で要求される速度の偏りが考慮されていなかった。実際の作業においては、横方向の動作が主に要求され、それ以外の動作はあまり要求されないような方向に偏りがある場合がある。このような状況においは、前節の可操作性は用いることはできない。そのため、手先で要求される速度の偏りを陽に考慮するために考えられたのが確率的可操作度である。この指標は先程のものとは逆に、手先で要求される速度が与えられた時に、それに対応する関節の速度が小さい方がよいという考え方に基づいている。

今、m 次元の単位球 S を考えて、微小部分表面 dS で表される速度の 2 乗の期待値は

$$E_{\dot{x}} = P(dS)\|\dot{x}\|^2 dS \tag{4.59}$$

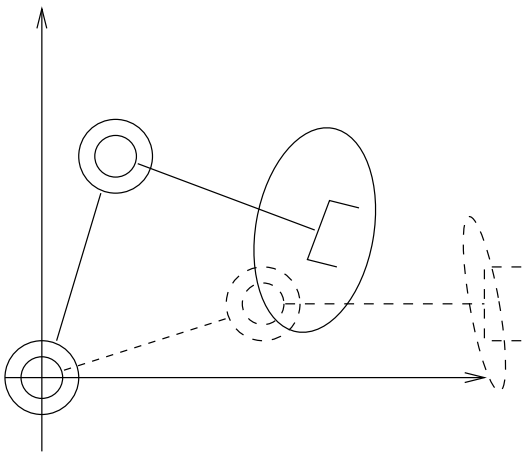

図 4.5: 平面 2 リンクマニピュレータの可操作楕円体

により与えられる。ただし、$P(dS)$ は dS 方向に動作指令が与えられる確率密度関数である。これより、全空間にわたった速度の 2 乗の期待値は

$$\int\int_S P(dS)\|\dot{x}\|^2 dS \tag{4.60}$$

となる。しかし、この値は $\dot{x}$ の値によって変化してしまうため、何らかの正規化が必要となる。ここでは $E_{\dot{x}} = 1$ となるような正規化を考える。確率密度関数の定義より

$$\int\int_S P(dS)dS = 1 \tag{4.61}$$

であるから、これを正規化と見なせば、この正規化は $\|\dot{x}\|$=1 を条件にしたものと等しくなる。つまり、$\dot{x}$ の大きさは等しいが、$P(dS)$ が大きいところでは、頻繁にその速度が要求されると解釈することに等しい。

$\|\dot{x}\|^2$ に対応する速度は $\dot{x}(JJ^T)^{-1}\dot{x}$ であるから、 1 つの関節にたいする速度の 2 乗の期待値は $E_{\dot{q}}S)$ は

$$E_{\dot{q}}(S) = \int\int_S P(dS)\dot{x}(JJ^T)^{-1}\dot{x}dS/n \tag{4.62}$$

となる。(n で割っているのは、リンク数が異なる場合でも意味を持たせるためである。) したがって、この値が小さいほど性能はよいと考えられるので、確率的可操作度は次の式で定義される。

$$m_s(q) = \begin{cases} \sqrt{1/E_{\dot{q}}(S)} & \text{if} \quad det(JJ^T) \neq 0 \\ 0 & \text{if} \quad det(JJ^T) = 0 \end{cases} \tag{4.63}$$

ここで定義した可操作度と、全節の可操作性の関係を見るために、$P(dS)$ が一定の場合を考えよ

う。式 (4.64) を変形して、

$$E_{\dot{q}}(S) = \int\int_S P(dS)\dot{x}(JJ^T)^{-1}\dot{x}dS/n \tag{4.64}$$

$$= tr((JJ^{-1}))\int\int_S P(dS)\dot{x}\dot{x}^T dS/n \tag{4.65}$$

となる。m 次元単位球に対して、$P(dS)$ が一定で $\|\dot{x}\| = 1$ であると、

$$\int\int_S \dot{x}\dot{x}^T dS = 1/mI \tag{4.66}$$

であるので、

$$E_{\dot{q}}(S) = tr((JJ^T)^{-1})/mn \tag{4.67}$$

となる。今、JJ^T が正則であるとすると、JJ^T の特異値分解を使って

$$JJ^T = V\Sigma^2 V^T \tag{4.68}$$

であることを考えると、

$$tr((JJ^T)^{-1}) = tr(V\Sigma^{-2}V^T) = tr(\Sigma^{-2}V^T V) = \sum \frac{1}{\sigma_i^2} \tag{4.69}$$

となる。また、1 つでも $\sigma_i = 0$ であるとこの値は ∞ となるので、結局

$$m_s(q) = \begin{cases} \sqrt{\frac{mn}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}}} & \text{if} \quad det(JJ^T) \neq 0 \\ 0 & \text{if} \quad det(JJ^T) = 0 \end{cases} \tag{4.70}$$

となる。この評価量は調和平均型可操作性とも呼ばれる。これを可操作性と比べると $\sqrt{\sum \sigma_i^2}$ で割っていることが異なっていることが分かり、そのために若干性質が異なって来る。

第5章　運動方程式

前章までで、ロボットアームの関節角度とその角速度がある値であるときに、ロボットの手先がどのように運動するかの順運動学問題と、その逆の逆運動学問題について説明した。しかし、我々がロボットアームの制御を行なう場合、一般的には入力は各関節に加えられるトルク又は、力であるので、その入力に対してロボットがどのような挙動を取るかを知らなければ、制御系の解析・設計を行なうことが出来ない。本章では、入力から角度・角速度の関係を与える運動方程式の導出について考える。

5.1　一般化座標とホロノミック拘束

5.1.1　完全な一般化座標

今図 5.3 のように平面内を運動する 2 つの質点 $m1, m2$ を考えると、この 2 つの質点の位置は 2 つの座標の組 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を与えることによってその静的な配置を表すことができる。このように、質点又は剛体の配置を表す座標の組を一般化座標という。今、考えている平面内の 2 質点系では (x_1, y_1, x_2, y_2) が一般化座標となる。明らかに一般化座標の取り方は一意ではなく、例えば m_2 の座標は (x, y) の絶対座標ではなく、m_1 に対する相対座標 $(\Delta x, \Delta y)$ に取り、全系の一般化座標を $(x_1, y_1, \Delta x, \Delta y)$ に取ることもできる。また、極座標系を用いることもできる。

今、系の配置を表すのに一般化座標として、$(x_1, y_1, \Delta x)$ を考えてみると、この変数の組を指定しただけでは全系の状態を一意に決定することができない。このように、その値の組を一つ固定しても、系の配置が一意に表現出来ないとき、その一般化座標は完全ではないという。逆に、一般化座標の一つの組に対して系の配置が一意に定まるとき、その一般化座標は完全であるという。この意味では、$(x_1, y_1, x_2, y_2, \Delta x, \Delta y)$ の組は完備な一般化座標である。しかし、一般化座標 (x_1, y_1, x_2, y_2) と $(x_1, y_1, x_2, y_2, \Delta x, \Delta y)$ には大きな相違点が存在する。というのは、$(x_1, y_1, x_2, y_2, \Delta x, \Delta y)$ は完備であるが冗長であり、

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_2 - x_1 \\ \Delta y &= y_2 - y_1 \end{aligned}$$

という変数間に拘束条件がある。

次にもう少し独立変数と従属変数が自明でない場合を考える。二つの質点が質量のない棒でリジッドに連結されているとする。この場合に一つの一般化座標は (x_1, y_1, x_2, y_2) である。しかし、棒の長さを l とすると、

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l^2 \tag{5.1}$$

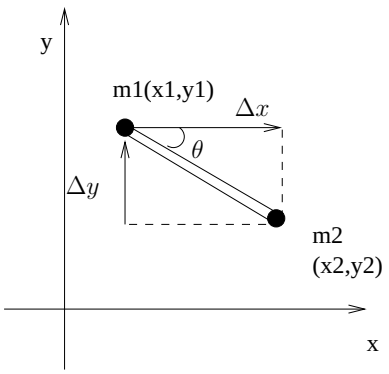

図 5.1: 拘束されて平面内を運動する 2 質点

という拘束がある。これより、例えば

$$y_1 = y_2 \pm \sqrt{l^2 - (x_1 - x_2)^2} \tag{5.2}$$

と表すことができる。従って、独立な一般化座標は (x_1, x_2, y_2) とすることができる。また、他の一般化座標の選び方は (x_1, y_1, θ) である。

このように、一般化座標が $(q_1, \cdots, q_m)$ と m 個あるとき、一般化座標に対して

$$c_1(q_1, \cdots, q_m, t) = 0$$
$$\cdot$$
$$c_r(q_1, \cdots, q_m, t) = 0$$

の関係が成り立っている時、$c_i(q_1, \cdots, q_m, t) = 0$ をホロノミックな拘束という。今、拘束が時間 t の陽な関数ではないとし、

$$C(q_1, \cdots, q_m) := \begin{bmatrix} c_1(q_1, \cdots, q_m) \\ \cdots \\ c_r(q_1, \cdots, q_m) \end{bmatrix}, \quad q := \begin{bmatrix} q_1 \\ \cdot \\ q_m \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

としたとき、

$$J_c := \frac{\partial C}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial c_1}{\partial q_m} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial c_r}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial c_r}{\partial q_m} \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

と定義すると、$rank J_c = r$ の時、陰関数定理により $q_1, \cdots, q_m$ から $n = m - r$ 個の変数を選び出して、その他の r 個の変数を表すことができる。今、q_{n+1} から q_m を q_1 から q_n で表すことにすると、q_{n+1} から q_m は q_1 から q_n の従属変数となり、q_1 から q_n が独立変数となる。

上記の例ではホロノミック拘束は明らかである。しかし、力学系においてホロノミック拘束が常に自明な形で与えられるとは限らない。

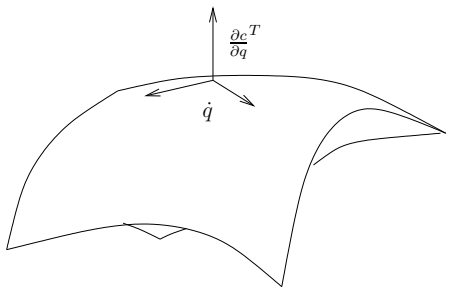

図 5.2: 拘束式と接ベクトル

今、ホロノミックな拘束式

$$c(q_1, \cdots, q_m) = 0 \tag{5.5}$$

があるとすると、両辺を時間で微分して

$$\frac{\partial c}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial c}{\partial q_r}\dot{q}_r = \frac{\partial c}{\partial q}\dot{q} = 0 \tag{5.6}$$

が成り立つ。これは $(\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_m)$ が $c(q_1, \cdots, q_m) = 0$ で表される平面の接ベクトルになっていることを意味している。(図 5.2 参照) このような $\dot{q}_j$ に関する拘束 (速度拘束) が先に与えられる場合がある。前の例で、次の速度拘束のみが与えられたと仮定しよう。つまり、

$$[(x_1 - x_2), (y_1 - y_2), -(x_1 - x_2), -(y_1 - y_2)] \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{5.7}$$

基本となる許容される独立な運動の速度の組は

$$\dot{q}_1 = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}, \dot{q}_2 = \begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ x_2 - x_1 \\ y_1 - y_2 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix}, \dot{q}_3 = \begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

となる。ホロノミック拘束が存在するかどうかという問題はこれらの $\dot{q}$ を接ベクトルとする曲面が存在するかということになる。ここで Li 括弧積というのものを

$$[\dot{q}_i, \dot{q}_j] := \frac{\partial q_j}{\partial q} q_i - \frac{\partial q_i}{\partial q} q_j \tag{5.9}$$

により定義すると、全ての組合せの (i, j) について $[\dot{q}_i, \dot{q}_j] = span\{\dot{q}_i\}$ になっているとき、Frobenious の定理によって $\frac{\partial c}{\partial q}\dot{q}$ を満たすホロノミック拘束 $c(q_1, \cdots, q_m) = 0$ が存在する。実際、棒により拘束されている場合、

$$[\dot{q}_1, \dot{q}_2] = 0, [\dot{q}_2, \dot{q}_3] = 2\dot{q}_1, [\dot{q}_3, \dot{q}_1] = -2\dot{q}_2 \tag{5.10}$$

となり、条件を満たしていることが分かる。

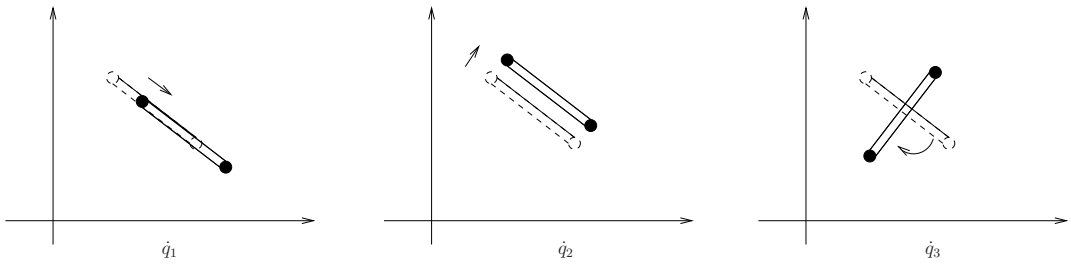

図 5.3: 速度拘束に対して許容される 2 質点の速度

5.1.2　独立な一般化座標と一般化力

次に N 個の質点系が独立かつ完全な一般化座標 q_1 から q_n によって表されているとする。これより、各質点の位置ベクトル $r_i \in R^3$ は $r_i(q_1, \cdots, q_n)(i = 1, \cdots, N)$ により表されているとする。ここで r_i の微小の変位を考えて、各質点に力 f_i が働くとすると、これによる仕事の変化分は

$$\delta W = \sum_i f_i^T \delta r_i \tag{5.11}$$

となる。ところが、

$$\delta r_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \tag{5.12}$$

であるから、

$$\delta W = \sum_i f_i^T \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_i f_i^T \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \tag{5.13}$$

となる。ここで、

$$F_j := \sum_{i=1}^{N} f_i^T \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \tag{5.14}$$

とすると、

$$\delta W = \sum_{j=1}^{n} F_j \delta_j \tag{5.15}$$

となる。この F_j を座標 q_j に対する一般化力という。例えば、q_j が並進を表す場合には F_j は力になり、q_j が回転の場合には F_j はトルクとなる。ここで、F_j がスカラ量であることに注意する。

5.2 Hamilton の原理と Lagrange の運動方程式

5.2.1 ポテンシャル力

一般化座標 q に対して、力 f が

$$f = -\left(\frac{\partial U(q)}{\partial q}\right)^T, \ U(q) \in R \tag{5.16}$$

で表されるとき、f をポテンシャル力といい、$U(q)$ をポテンシャル関数という。ポテンシャル $U(q)$ の値は式から分かるように、途中の経路によらず最終の q のみの変数である。

5.2.2 Hamilton の原理

ニュートンの第 2 法則より、質点の運動方程式は

$$f_i - \frac{d}{dt}p_i = 0, \ \ p_i := m_i \frac{d}{dt} r_i (i = 1, \cdots, N) \tag{5.17}$$

である。一般に、一般化座標にホロノミック拘束があると、この N 個の運動方程式は冗長である。この冗長性を回避するために、次の等式を考える。

$$\sum_{i=1}^{N} (f_i - \frac{d}{dt}p_i)^T \delta r_i = 0 \tag{5.18}$$

ここで (5.17) から (5.18) は成立するが、r_i が独立でないため、(5.18) から (5.17) は導かれないことに注意しよう。$\sum_i f_i^T \delta r_i$ は全ての質点に働いた仕事の総和であるが、これはポテンシャル・エネルギの変化分とそれ以外の外力のなしたものの和で次のように表すことができる。(f_i に含まれる拘束力は打ち消しあって全体としては仕事をしないから。)

$$\sum_i f_i^T \delta r_i = -\delta U + \sum_j F_j \delta q_j \tag{5.19}$$

これより

$$-\delta U + \sum_j F_j \delta q_j - \sum_i (\frac{dp_i}{dt})^T \delta r_i = 0 \tag{5.20}$$

となる。ここで、

$$-\sum_i \frac{d}{dt}(p_i^T \delta r_i) = -\sum_i \left(\frac{dp_i}{dt}\right)^T \delta r_i - \sum_i p_i^T \frac{d}{dt} \delta r_i \tag{5.21}$$

の関係より、

$$-\sum_i \left(\frac{dp_i}{dt}\right)^T \delta r_i = \sum_i p_i^T \frac{d}{dt} \delta r_i - \sum_i \frac{d}{dt}(p_i^T \delta r_i) \tag{5.22}$$

成り立つ。今、考えている時間で質点の質量が変化しないとすると、全体の運動エネルギの時間変化は

$$\delta K = \delta(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^T v_i) = \sum_i m_i v_i \delta v_i = \sum_i p_i^T \frac{d}{dt} \delta r_i \tag{5.23}$$

となり、これより

$$-\sum_i (\frac{dp_i}{dt})^T \delta r_i = \delta K - \sum_i \frac{d}{dt}(p_i^T \delta r_i) \tag{5.24}$$

となる。この関係を (5.20) に入れると

$$\delta K - \delta U + \sum_j F_j \delta q_j - \sum_i \frac{d}{dt}(p_i^T \delta r_i) = 0 \tag{5.25}$$

となる。今、$t = t_1$ 及び $t = t_2$ での配置が決まっており、$\delta r_i(t_1) = 0$ かつ $\delta r_i(t_2) = 0$ であるとし、上の式を t_1 から t_2 まで時間で積分すると

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta U + \sum_j F_j \delta q_j) dt = \sum_i (p_i^T(t_2) \delta r_i(t_2)) - \sum_i (p_i^T(t_1) \delta r_i(t_1)) = 0 \tag{5.26}$$

となる。この関係式を Hamilton の原理という。この式は、外力 F_j が働きながら系が運動するとき、q_j の運動はこの積分評価式が最小になるように変化することを意味している。

5.2.3　Lagrange の運動方程式

上述の Hamilton の原理では、q_j が時間と共に具体的にどう運動するかが明らかでない。そのために、$\delta U, \delta K$ を q_j の関数で表し、q_j の時間変化、つまり運動方程式を導出する。

まず、ラグランジェアン L を $L = K - U$ として定義する。L は $(q, \dot{q})$ の関数であるから

$$\delta L = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j \right) \tag{5.27}$$

となる。この関係を (5.26) に代入すると

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + F_j \delta q_j \right) dt = 0 \tag{5.28}$$

となる。ここで左辺第一項に部分積分の公式を用いると、

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \delta q_j dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt \tag{5.29}$$

であるから、

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + F_j \delta q_j \right) dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right]_{t_1}^{t_2} = 0 \tag{5.30}$$

となる。今, 一般化座標は完全であるから、$\delta r_i(t_1) = 0, \delta r_i(t_2) = 0$ より、$\delta q_j(t_1) = 0, \delta q_j(t_2) = 0$ が成り立つので、結局、

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + F_j \delta q_j \right) dt = 0 \tag{5.31}$$

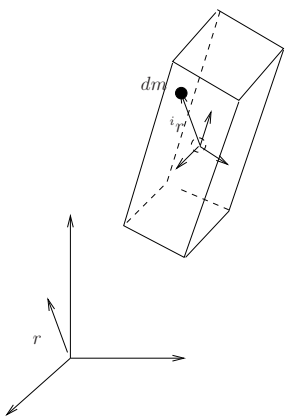

図 5.4: リンク i 上での分布質量 dm の運動エネルギ

を得る。ここで q_j が独立であったことを思い出すと、上記の等号が成り立つためには

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)+\frac{\partial L}{\partial q_j}+F_j=0 \tag{5.32}$$

つまり、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=F_j \tag{5.33}$$

が成り立たなければならない。これが Lagrange の運動方程式である。

5.3 Lagrange の運動方程式のマニピュレータへの適用

次に、ロボットアームについて具体的に Lagrange の運動方程式をどのように適用するかを述べる。ただし、議論を簡単にするために、各関節の粘性摩擦は最初考えないことにする。

一般にロボットアームを制御する際には、外部入力は関節に働くトルク、または力になるので、ここでは一般化座標としてはそれに対応してその関節での値を $q_j(j=1,\cdots,n)$ を用いることにする。 Lagrange の運動方程式の利点は、ラグランジェアン L を求めさえすれば、あとは形式的に運動方程式を得ることができる点である。L を計算するためには、全系の運動エネルギとポテンシャル・エネルギを計算する必要があるが、それは具体的に次のように与えられる。

今、あるリンク i 上に固定された点 r を考えると、この点での速度 v_r は

$$v_r \;=\; v_c \;+\; \omega\times r \tag{5.34}$$

である。ただし、v_c はリンクに固定された原点の速度、ω はリンクの角速度である。従って、点 r での分布質量を dm とすると、その点の運動エネルギは次のようになる。

$$dK_i \;=\; \frac{1}{2}dm\|v\|^2 \tag{5.35}$$

以上では、座標系の原点の位置は任意のものを考えたが、解析を簡単にする為に原点としては重心を取るものとする。つまり、

$$\int_{Link_i} rdm \ = \ 0 \tag{5.36}$$

を満たすとする。これより、リンク i の運動エネルギは

$$\begin{aligned} K_i \ &= \ \int_{Link_i} \frac{1}{2}\|v_r\|^2 dm \\ &= \ \frac{1}{2}\int_{Link_i} \|v_c\|^2 dm \ + \ \int_{Link_i} v_r^T \omega \times r dm \ + \ \frac{1}{2}\int_{Link_i} \|\omega \times r\|^2 dm \end{aligned} \tag{5.37}$$

ところが、右辺第 2 項は

$$\int_{Link_i} v_r^T \omega \times r dm \ = \ v_r^T \omega \times \int_{Link_i} rdm \tag{5.38}$$

であるから、原点の取り方よりゼロである。よって、

$$K_i = \frac{1}{2}\int_{Link_i} \|v_c\|^2 dm \ + \ \frac{1}{2}\int_{Link_i} \|\omega \times r\|^2 dm \tag{5.39}$$

次に、角速度の項について考える。内積を Trace(対角項の和を求めるオペレーション) により表現すると、

$$\int_{Link_i} \|\omega \times r\|^2 dm = \int_{Link_i} Trace \ \omega \times r(\omega \times r)^T dm \tag{5.40}$$

となる。更に、外積と座標変換の不変性より

$$\int_{Link_i} \|\omega \times r\|^2 dm \ = \ \int_{Link_i} TraceR(R^{-1}\omega \times R^{-1}r)(R(R^{-1}\omega \times R^{-1}r))^T dm \tag{5.41}$$

となり、Trace は行列の演算が実行可能なら $Trace(AB) = Trace(BA)$ であるので、

$$\int_{Link_i} \|\omega \times r\|^2 dm = \int_{Link_i} TraceR^T R \, {}^i\omega \times {}^i r \, {}^i r^T ({}^i\omega \times)^T dm \ = \ Trace \, {}^i\omega \times \int_{Link_i} {}^i r \, {}^i r^T dm ({}^i\omega \times)^T \tag{5.42}$$

となる。ここで、疑似慣性行列 J_i を次のように定義すると、

$$\begin{aligned} J_i \ \ : \ \ &= \int_{Link_i} {}^i r \, {}^i r^T dm \\ &= \ \begin{bmatrix} \int_{Link_i} xxdm & \int_{Link_i} xydm & \int_{Link_i} xzdm \\ \int_{Link_i} xydm & \int_{Link_i} yydm & \int_{Link_i} yzdm \\ \int_{Link_i} xzdm & \int_{Link_i} yzdm & \int_{Link_i} zzdm \end{bmatrix} \ =: \ \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.43}$$

$$\int_{Link_i} \|\omega \times r\|^2 dm = Trace \, {}^i\omega \times J_i ({}^i\omega \times)^T \tag{5.44}$$

となる。ここで、J_i は定数行列であることに注意する。これより、$Trace$ を二次形式に直すと

$$Trace \, {}^i\omega \times J_i ({}^i\omega \times)^T = \ {}^i\omega^T \, {}^i I_i \, {}^i\omega \tag{5.45}$$

という形の見慣れた形になる。ただし、 ${}^iI_i$ は慣性行列 (テンソル) で

$$ {}^iI_i \ := \ \left[\begin{array}{ccc} J_{yy}+J_{zz} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{xx}+J_{zz} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{xy} & J_{xx}+J_{yy} \end{array} \right] \tag{5.46} $$

上の形では ω が i 座標系で表現されているので、元に戻すと

$$ \int_{Link_i} \|\omega \times r\|^2 dm \ = \ \omega^T R \ {}^iI_i R^T \omega, \quad {}^iI_i > 0 \tag{5.47} $$

となる。つまり、慣性行列の姿勢による変化は左から姿勢行列 R を右からその逆行列を掛ければ良いことが分かる。今、リンク i の重心の速度および回転速度が次のヤコビヤンによって表現されるとする。

$$ \left[\begin{array}{c} v_c \\ \omega \end{array} \right] \ = \ \left[\begin{array}{c} J_{v_{c_i}} \\ J_{\omega_i} \end{array} \right] \dot{q} \tag{5.48} $$

これを用いると、リンク i の運動エネルギは次のようになる。

$$ K_i \ = \ \frac{1}{2} \dot{q}^T \left\{ m_i J_{v_{c_i}}^T J_{v_{c_i}} \ + \ J_{\omega_i}^T R_i \ {}^iI_i R_i^T J_{\omega_i} \right\} \dot{q} \tag{5.49} $$

全系の運動エネルギは $K \ = \ \sum_{i=1}^n K_i$ で与えられるから、ここで次の慣性行列 $D(q)$ を導入すると、

$$ D(q) \ := \ \sum_{i=1}^n \{ m_i J_{v_{c_i}}^T J_{v_{c_i}} \ + \ J_{\omega_i}^T R_i \ {}^iI_i R_i^T J_{\omega_i} \} \tag{5.50} $$

これより、明らかに $D(q)$ は対称で、正定である事が分かる。運動エネルギは次のように質点の場合と同じように表現出来る。

$$ K \ = \ \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \tag{5.51} $$

次に、ポテンシャル・エネルギであるが、これに関してはリンク i 座標系での重心の座標を ${}^ir_{ic}$ とすると、基準座標系での位置は、

$$ r_{ic} \ = \ {}^0T_i \ {}^ir_{ic} \tag{5.52} $$

であるので、リンク i に関するポテンシャルエネルギは

$$ U_i \ = \ g^T \ {}^0T_i \ {}^ir_{ic} \tag{5.53} $$

により求まる。ここで、g は重力を表す定数ベクトルである。よって、求めるポテンシャル・エネルギは $U = \sum_{i=1}^n U_i$ により求まる。従って、求める運動方程式はこれらを (5.33) に代入して求めることが出来る。具体的に、これを行う為に、K を次のように表現する。

$$ K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j := \sum_{i,j}^n d_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \tag{5.54} $$

これより、

$$ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{j=1}^n d_{kj} \dot{q}_j \tag{5.55} $$

更に、

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{j=1}^{n}\left\{d_{kj}\ddot{q}_j + \frac{d}{dt}(d_{kj})\dot{q}_j\right\} \tag{5.56}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} d_{kj}\ddot{q}_j + \sum_{i,j}^{n}\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_i\dot{q}_j \tag{5.57}$$

また、

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{\partial U}{\partial q_k} \tag{5.58}$$

となる。これより運動方程式は

$$\sum_{j=1}^{n} d_{kj}\dot{q}_j + \sum_{i,j}^{n}\left(\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{\partial U}{\partial q_k} = \tau_k, \quad k = 1, \cdots, n \tag{5.59}$$

となる。これを行列表現すると、次の運動方程式を得る事が出来る。

$$D(q)\ddot{q} \ + \ C(q,\dot{q})\dot{q} \ + \ G(q) \ = \ \tau \tag{5.60}$$

ここで、$D(q)\ddot{q}$ は慣性項、$C(q,\dot{q})\dot{q}$ は中心・コリオリ力項、$G(q)$ は重力項である。上のような運動方程式を Lagrange の運動方程式といい、閉じた形での方程式と呼ばれることもある。ここで、注意しなければいけないことは、$C(q,\dot{q})$ は一意には表現できないことである。特に、$C(q,\dot{q})$ の表現として重要なのは次の Christoffel symbols と呼ばれる表現である。

この表現を得る為に、

$$\sum_{i,j}^{n}\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n}\left\{\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j}\right\}\dot{q}_i\dot{q}_j \tag{5.61}$$

と変形する。これより、

$$\sum_{i,j}^{n}\left(\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j \tag{5.62}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n}\left\{\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right\}\dot{q}_i\dot{q}_j \tag{5.63}$$

となる。ここで、

$$C_{ijk} := \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k}\right\} \tag{5.64}$$

を Christffel symbols という。この表現を使うと、$C(q,\dot{q})$ の要素は次のようになる。

$$C_{kj}(q,\dot{q}) = \sum_{i=1}^{n} C_{ijk}\dot{q}_i \tag{5.65}$$

この $C(q,\dot{q})$ はシステムの安定性や適応制御の解析に重要な表現で、次の性質を満たす。

$$S(q) := \dot{D}(q) - 2C(q,\dot{q}) \tag{5.66}$$

とすると、$S(q)$ は歪対称である。 この性質は次のように簡単に示すことができる。

$$\dot{d}_{kj} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_i \tag{5.67}$$

であるので、

$$\begin{aligned} S_{kj} &= \dot{d}_{kj} - 2C_{kj} & (5.68)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_i - 2\sum_{i=1}^{n} C_{ijk}\dot{q}_i & (5.69)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} \right\} \dot{q}_i & (5.70) \end{aligned}$$

となる。これより、D が対称行列、つまり $d_{ij} = d_{ji}$ であるので

$$S_{kj} = -S_{jk} \tag{5.71}$$

となる。これら運動方程式に関する性質をまとめると次のようになる。

[性質 1] $D(q)$ は対称行列。

[性質 2] $D(q)$ は正定行列であり、次の不等式満足する正の定数 $\lambda_m,\ \lambda_M$ が存在する。

$$0 \ < \ \lambda_m \ \leq \ \lambda(D(q)) \tag{5.72}$$

また、関節が全て回転ジョイントである場合には

$$\lambda(D(q)) \leq \lambda_M \ < \ \infty \tag{5.73}$$

を満たす。ただし、$\lambda(M)$ は行列 M の固有値を表す
(後に文字 λ を設計パラメータの一つとしても用いるので注意する。)

[性質 3] $C(q, \dot{q})$ は $\dot{q}$ に関して有界、つまり

$$||C(q, \dot{q})|| \ \leq \ C_M ||\dot{q}|| \tag{5.74}$$

[性質 4] $C(q, \cdot)$ は次の性質を満たす。

$$\begin{aligned} C(q, x)y &= C(q, y)x & (5.75)\\ C(q, x + \alpha y) &= C(q, x) \ + \ \alpha C(q, y) & (5.76) \end{aligned}$$

[性質 5] $K := \dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q})$ は歪対称、つまり

$$K \ + \ K^T \ = \ 0 \text{ または } x^T K x \ = \ 0 \ \ for \, \forall \, x \tag{5.77}$$

[性質 6] 重力項 $G(q)$ は有界な q に対して有界となる。

[性質 7] 適当なパラメータベクトル a を選択することにより、(5.60) の右辺は、既知関数を要素とする行列 Y と a との積で表現することが出来る。つまり、

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q})a \ = \ \tau \tag{5.78}$$

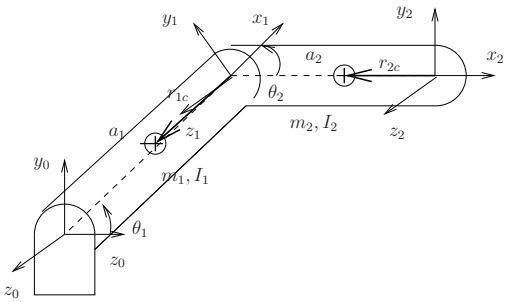

図 5.5: 平面 2 リンクマニピュレータ

5.4　平面 2 リンクマニピュレータの運動方程式

今図 5.5 のような平面 2 リンクマニピュレータを考えて、上で述べた方法によって形式的に運動方程式を導いてみよう。まず、各リンクに取り付けられた座標系での重心の座標をつぎのように仮定する。

$$\begin{aligned} {}^1r_{1c} &= [-r_1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1]^T \\ {}^2r_{2c} &= [-r_2 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1]^T \end{aligned}$$

これより、重心の位置は

$$r_{1c} = A_1 \, {}^1r_{1c} = \begin{bmatrix} l_1c_1 \\ l_1s_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.79}$$

$$r_{2c} = A_1A_2 \, {}^2r_{2c} = \begin{bmatrix} a_1c_1 + l_2c_{12} \\ a_1s_1 + l_2s_{12} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.80}$$

である。ただし、$l_1 = a_1 - r_1, l_2 = a_2 - r_2$ である。両辺を時間で微分して各重心の速度をヤコビヤンを使って表現すると

$$v_{1c} = \begin{bmatrix} -l_1s_1 & 0 \\ l_1c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot\theta_1 \\ \dot\theta_2 \end{bmatrix} \tag{5.81}$$

$$v_{2c} = \begin{bmatrix} -a_1s_1 - l_2s_{12} & -l_2s_{12} \\ a_1c_1 + l_2c_{12} & l_2c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot\theta_1 \\ \dot\theta_2 \end{bmatrix} \tag{5.82}$$

である。また、角速度は次のように表現される。

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{5.83}$$

$$\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{5.84}$$

次に、平面 2 リンクで対称性を仮定してそれぞれの慣性行列が次の様に表現されると仮定する。

$${}^1I_1 = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{bmatrix} \tag{5.85}$$

$${}^2I_2 = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix} \tag{5.86}$$

これらより、慣性行列を求めると、

$$D(q) = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + J_1 + m_2(a_1^2 + l_2^2) + J_2 + 2m_2 a_1 l_2 c_2 & J_2 + m_2 l_2^2 + m_2 a_1 l_2 c_2 \\ J_2 + m_2 l_2^2 + m_2 a_1 l_2 c_2 & J_2 + m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \tag{5.87}$$

従って、

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = \dot{q}^T D \tag{5.88}$$

ただし、関数の勾配とベクトルを明確を区別するためににスカラ関数のベクトルでの偏微分を横ベクトルとして表している。つまり、

$$\frac{\partial f}{\partial q} := \left[\frac{\partial f}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial q_n} \right]$$

よって、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \ddot{q}^T D + \dot{q}^T \dot{D} \tag{5.89}$$

更に、

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial q_1} \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} \\ \cdot \\ \frac{\partial L}{\partial q_n} \end{bmatrix} = (\frac{\partial L}{\partial q})^T \tag{5.90}$$

であるから、

$$\frac{\partial x^T y(q)}{\partial q} = x^T \frac{\partial y(q)}{\partial q} \tag{5.91}$$

であることに注意すると、形式的に次の運動方程式を得る。

$$D(q)\ddot{q} + \left(\dot{D}(q) - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial D(q)\dot{q}}{\partial q} \right\}^T \right) \dot{q} + \left\{ \frac{\partial U}{\partial q} \right\}^T = \tau \tag{5.92}$$

ただし、この場合の $C(q,\dot{q})$ は一般に上記の歪み対称性を持っていないことに注意する。この式に上で求めた $D(q)$ を代入し、U が平面内で不変であることを用いると次の運動方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} J_1 + m_1 l_1^2 + J_2 + m_2(a_1^2 + l_2^2) + 2a_1 l_2 c_2 & J_2 + m_2 l_2^2 + m_2 a_1 l_2 c_2 \\ J_2 + m_2 l_2^2 + m_2 a_1 l_2 c_2 & J_2 + m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + m_2 a_1 l_2 s_2 \begin{bmatrix} 2\dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_2 \\ \frac{1}{2}\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 & -\frac{1}{2}\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \tag{5.93}$$

もし、各関節 d_i の粘性がある場合には、左辺に次の項を加えれば良い。

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{5.94}$$

上のシステムでの表現では、$\dot{D} - 2C(q,\dot{q})$ は歪み対称ではないが、$C(q,\dot{q})$ を変形する事により、その性質を満たすことができる。

$$\begin{bmatrix} 2\dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_2 \\ \frac{1}{2}\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 & -\frac{1}{2}\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} => \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \\ -\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{5.95}$$

更に、パラメータを次の様に定義すると、

$$\begin{aligned} \phi_1 &:= m_1 l_1^2 + m_2 a_1^2 + J_1 \\ \phi_2 &:= m_2 l_2^2 + J_2 \\ \phi_3 &:= m_2 a_1 l_2 \\ \phi_4 &:= d_1 \\ \phi_5 &:= d_2 \end{aligned}$$

運動方程式は

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \phi_1 + \phi_2 + 2\phi_3 c_2 & \phi_2 + \phi_3 c_2 \\ \phi_2 + \phi_3 c_2 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \\ &\left(-\phi_3 s_2 \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \\ -\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_4 & 0 \\ 0 & \phi_5 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\ = &\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.96}$$

となり、

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 & \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 & c_2(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - s_2\dot{\theta}_2(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & \dot{\theta}_1 & 0 \\ 0 & \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 & c_2\ddot{\theta}_1 + s_2\dot{\theta}_1^2 & 0 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

という表現が可能である。

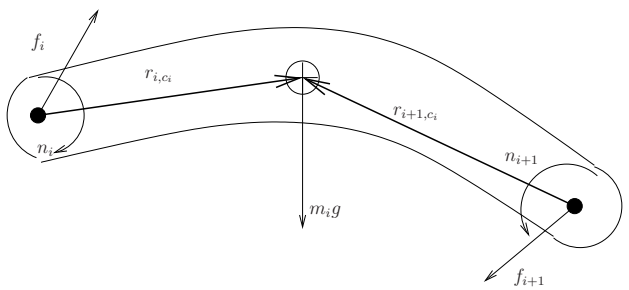

図 5.6: リンク i の力とモーメントの釣合

5.5 Newton-Euler の運動方程式

前節では閉じた形での運動方程式 (Closed Form Dynamic Equation) を求めたが、次は漸化式的に運動方程式 (Recursive Form Dymanic Equation) を求める方法を考える。これらの表現は剛体リンクを考える場合に解析を目的とした場合には、どちらも同様に使う事ができる。しかし、柔軟なアームを考えた場合には Lagrange の定式化が優れているが、シミュレーション及びリアルタイムの制御には計算の効率から漸化式による表現が用いられる。この漸化式による表現は Newton-Euler の定式化により次のように求められる。

Newton-Euler の運動方程式の基本は次の 3 つの法則である。

作用反作用法則 物体 1 が物体 2 に力及びモーメント力を及ぼした場合、そのちょうど逆の力及びモーメント力を物体 2 が物体 1 より受ける。

ニュートンの法則 並進モーメントの時間微分は与えられた力に等しい。つまり、

$$\frac{dmv}{dt} \;=\; f \tag{5.97}$$

オイラーの法則 回転モーメントの時間微分は与えられたモーメント力に等しい。つまり、

$$\frac{dI\omega}{dt} \;=\; \tau \tag{5.98}$$

この法則を用いて、図 5.6 に示されるリンクの釣合の式を求めて見よう。その前に、次の関係を導いて置く。

$$\frac{dI_i\omega_i}{dt} \;=\; I_i\dot{\omega}_i \;+\; \omega_i \times (I_i\omega_i) \tag{5.99}$$

前節の結果より、$I_i = R\,{}^iI_iR^T$ であるから

$$\frac{dI_i\omega_i}{dt} \;=\; \frac{dR\,{}^iI_iR^T\omega_i}{dt} \tag{5.100}$$

従って、${}^iI_i$ は定数行列であること考慮すると

$$\frac{dR\,{}^iI_iR^T\omega_i}{dt} \;=\; \omega_i \times R\,{}^iI_iR^T\omega_i \;+\; R\,{}^iI_i(\omega_i \times R)^T\omega_i \;+\; R\,{}^iI_iR^T\dot{\omega}_i \tag{5.101}$$

である。一方、

$$R\ {}^{i}I_i(\omega_i \times R)^T\omega_i = -R\ {}^{i}I_i R^T\omega_i \times \omega_i = 0 \tag{5.102}$$

であるので、結局

$$\frac{dR\ {}^{i}I_i R^T\omega_i}{dt} \ = \ I_i\dot{\omega}_i \ + \ \omega_i \times (I_i\omega_i) \tag{5.103}$$

となり望ましい関係が得られる。この関係を用いると、力及びモーメントの釣合の式が次のように求まる。

$$m_i\dot{v}_{c_i} = m_i g \ + \ f_i \ - \ f_{i+1} \tag{5.104}$$

$$I_i\dot{\omega}_i \ + \ \omega_i \times (I_i\omega_i) \ = \ n_i \ - \ r_{i,c_i} \times f_i \ - \ n_{i+1} \ + \ r_{i+1,c_i} \times f_{i+1} \tag{5.105}$$

これを、次の漸化式の形に書き直す。

$$f_i \ = \ f_{i+1} \ + \ m_i\dot{v}_{c_i} - m_i g \tag{5.106}$$

$$n_i \ = \ n_{i+1} \ - \ f_i \times r_{i,c_i} \ + \ f_{i+1} \times r_{i+1,c_i} \ + \ I_i\dot{\omega}_i \ + \ \omega_i \times (I_i\omega_i) \tag{5.107}$$

この式はリンク i の角度、速度、加速度とリンク $i+1$ から作用する力及びモーメントが分かるとそれに釣りあう力とモーメントが計算出来ることを示している。更に、全てのリンクの角度、速度、加速度が分かっていると、先端のリンクより釣合の力及びモーメントを求めることができることも示している。

つぎに、各リンクの速度、加速度を漸化式によって求めることを考える。並進の速度及び角加速度は次の漸化式により求まることは簡単に分かる。ただし、簡単のため、全てのリンクは回転関節からなっているとする。

$$v_i \ = \ v_{i-1} \ + \ \omega_i \times r_{i,i+1} \tag{5.108}$$

$$\omega_i \ = \ \omega_{i-1} \ + \ z_{i-1}\dot{q}_i \tag{5.109}$$

また、加速度、角加速度に関しては、

$$\dot{v}_i \ = \ \dot{v}_{i-1} \ + \ \dot{\omega}_i \times r_{i,i+1} \ + \ \omega_i \times (\omega_i \times r_{i,i+1}) \tag{5.110}$$

$$\dot{\omega}_i \ = \ \dot{\omega}_{i-1} \ + \ \omega_{i-1} \times z_{i-1}\dot{q}_i \ + \ z_{i-1}\ddot{q} \tag{5.111}$$

となる。力の釣合の中に現われているのは、重心の並進速度、並進加速度であるので、それらは上の関係より次のように求まる。

$$v_{c_i} \ = \ v_{i-1} \ + \ \omega_i \times r_{i,c_i} \tag{5.112}$$

$$\dot{v}_{c_i} \ = \ \dot{v}_{c_i} \ + \ \dot{\omega}_i \times r_{i,c_i} \ + \ \omega_i \times (\omega_i \times r_{i,c_i}) \tag{5.113}$$

これらの式は、根元の速度、加速度が求まっていると順次先端に向けて各リンクの速度、加速度が求まることを意味している。更に、角関節でのトルクを求めるには、次の内積を計算して、釣合のモーメントから一般化力の成分つまり、トルクを求めれば良い。

$$\tau_i \ = \ z_{i-1}^T n_i \tag{5.114}$$

上記のことを整理して、アルゴリズムの形で示すと次のようになる。

Step 1 初期値として

$$\omega_0 \ = \ 0, \dot{\omega}_0 \ = \ 0, \dot{v}_{c0} \ = \ 0 \tag{5.115}$$

として式 (5.109),(5.111),(5.110),(5.113) の順で $\omega_i, \dot{v}_i, \dot{v}_{c_i}$ を $i = 1$ から n まで計算する。

Step 2

$$f_{n+1} \ = \ 0, \ \ n_{n+1} \ = \ 0 \tag{5.116}$$

として、式 (5.106),(5.107),(5.114) の順に f_i, n_i, τ_i を $i = n$ から 1 まで計算する。

上記の式では、I_i, r_* は時間と共に変化する変数であるが、各漸化式において、左から姿勢行列

$$^iR_0 \tag{5.117}$$

を掛けて、

$$\begin{aligned} {}^i\omega_i \ &= \ {}^iR_0 \, {}^i\omega_i \ , \ {}^i\dot{\omega}_i \ = \ {}^iR_0\dot{\omega}_i \ , \ {}^i\dot{v}_{c_i} \ = \ {}^iR_0\dot{v}_{c_i} \\ {}^if_i \ &= \ {}^iR_0 f_i, \ {}^in_i \ = \ {}^iR_0 n_i \end{aligned}$$

の量を導入すると多くの定数行列及び定数ベクトルによって漸化式にを記述することができる。但し、 ${}^i\dot{v}_{c_i}$ は $\frac{d}{dt}(\, {}^iv_{c_i})$ でないことに注意する。この量を用いると、対応するトルクは

$$z_{i-1}^T n_i \ = \ (\, {}^0R_{i-1}^T z_{i-1})^T (\, {}^{i-1}R_i n_i) \ = \ \mathbf{k}_0(\, {}^{i-1}R_i \, {}^in_i) \tag{5.118}$$

により計算される。このアルゴリズムは、必要とされる関節角、速度、加速度からそれに釣り合う入力トルクを計算する際に用いられる。

更に、上で求めた Newton-Euler の運動方程式と Lagrange の運動方程式 (5.60) は等価であるから、その式の形から慣性行列の i 行列目は

$$\ddot{q}_i \ = \ 1(j \neq i), \ \dot{q}_j \ = \ 0(j \neq i) \ , \dot{q}_j = 0, \ g = 0 \tag{5.119}$$

として漸化式を呼び出せば、τ としてその値が求まることが分かる。この関係はシミュレーションに用いられる。

第6章　拘束運動と力と位置のハイブリッド制御

6.1　拘束のあるシステムの運動方程式

今一般化ベクトル $q \in R^n$ を用いて、拘束の式が

$$c_i(q) = 0, \quad (i = 1, \cdots, m) \tag{6.1}$$

の用に表されているとする。これを簡単にベクトル表現して

$$C(q) = 0, C \in R^m \tag{6.2}$$

更に、幾何学的な拘束を受けないシステムの運動方程式が

$$D(q)\dot{q} + h(q) = \tau \tag{6.3}$$

によって表現されているとしよう。そうすると、拘束条件の式 (6.2) を微分して、

$$\dot{C}(q) = J_c\dot{q} = 0 \tag{6.4}$$

ただし、

$$J_c := \frac{\partial C}{\partial q} \tag{6.5}$$

ここで、J_c の各行ベクトルは $\dot{q}$ に直交していることを示している。これは、各行が q の拘束面の法線を表していることを示している。

(6.3) では拘束の条件を無視しているが、実際には拘束からくる力が右辺に加わり、その一般化力を τ_c とすると、(6.3) は

$$D(q)\dot{q} + h(q) = \tau + \tau_c \tag{6.6}$$

となる。しかし、この拘束力は仕事をしないので、

$$\tau_c^T\dot{q} = 0 \tag{6.7}$$

でなければならない。ところが、$\dot{q}$ と直交するベクトルは (6.5) によって与えられているので、結局拘束力は

$$\tau_c = J_c^T\lambda, \quad \lambda \in R^m \tag{6.8}$$

によって与えられる事になる。ここで与えられた拘束力は (6.5) をもう一度時間で微分して、

$$J_c\ddot{q} + \dot{J}_c\dot{q} = 0 \tag{6.9}$$

を得、これと (6.6) を連立して、

$$\begin{bmatrix} D(q) & J_c^T(q) \\ J_c(q) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau - h(q, \dot{q}) \\ -\dot{J}_c \dot{q} \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

によって与えられる。これより、$\ddot{q}, \lambda$ が一意に定まるためには、(6.10) の左辺の行列が正則である必要があることが分かる。

6.2　力と位置のハイブリッド制御

いま、ロボットにヤスリを持たせて、金属表面を磨くような作業を考えよう。この時、ヤスリは表面に対して、適当な押しつけ力を保ちながら、適当な速度で表面に沿って移動しなければならない。このように、ある方向には位置や速度、それ以外の方向に力を制御する方法を力と位置のハイブリッド制御と呼ぶ。

今、拘束したい超平面の方程式がデカルト座標 x を用いて次の様に与えられているとする。

$$C(x) = 0 \tag{6.11}$$

これより、x の接平面の方程式は

$$\frac{\partial C}{\partial x}\dot{x} = 0 \tag{6.12}$$

となる。ここで、各行は平面に対する法線ベクトルとなっており、発生できる力の基底ベクトルとなっていることに注意する。更に、ここでは E_f の各行はその長さが 1 に規格化されているとする。これを明示的に表現するために、

$$E_f = \frac{\partial C}{\partial x} \in R^{m \times n} \tag{6.13}$$

とする。ここで、$C(x)$ には冗長な拘束がないように、E_f は行フルランクであるとする。一方、位置あるいは、速度を制御できるのはこの補空間になるので、その規格化された基底ベクトルを横に並べたものを E_p とする。ただし、

$$rank \begin{bmatrix} E_p \\ E_f \end{bmatrix} = n \tag{6.14}$$

となるよいうに E_p を選ぶ。

今、一般化座標 q とデカルト座標 x が

$$x = f(q) \tag{6.15}$$

また、速度関係が

$$\dot{x} = J\dot{q}, \quad J := \frac{\partial f}{\partial q} \tag{6.16}$$

として与えられているとする。今、ロボットが拘束を満たして運動しているとすると、

$$\dot{C}(x) = 0 \quad \rightarrow \quad E_f J \dot{q} = 0 \tag{6.17}$$

となり、前節の議論よりロボットの運動方程式は

$$D(q)\ddot{q} + h(q,\dot{q}) = \tau - J^T E_f^T \lambda \tag{6.18}$$

となる。

一方、E_p の各行は規格化された基底ベクトルであるから、$\dot{x}$ と各行の内積はその基底の成分、つまりその方向の速度となる。つまり、移動方向の速度ベクトルを $\dot{x}_p$ とすると、

$$\dot{x}_p = E_p \dot{x} \tag{6.19}$$

と表現できる。これと拘束の式を合わせると、

$$E\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E := \begin{bmatrix} E_p \\ E_f \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

を得る。更に、この式を微分して、

$$E\ddot{x} + \dot{E}\dot{x} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{x}_p \tag{6.21}$$

を得、(6.16) を微分して

$$\ddot{x} = J\ddot{q} + \dot{J}\dot{q} \tag{6.22}$$

となる。この関係と運動方程式の関係を用いると、(6.21) は

$$\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{x}_p = EJ^{-1}(D^{-1}(\tau - h - J^T E_f^T \lambda) - \dot{J}\dot{q}) + \dot{E}J\dot{q} \tag{6.23}$$

ここで、ハイブリッド制御系を構成するのに、力と位置が見かけ上別々のループで非干渉な制御ができることが望ましい。このために、加速度と力に対応する新しい入力 u_1 と u_2 を考えて、

$$\ddot{x}_p = u_1 \tag{6.24}$$

$$\lambda = u_2 \tag{6.25}$$

となるように非干渉線形化することを考える。このための必要条件として、この関係を (6.23) に代入して、

$$\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} u_1 = EJ^{-1}(D^{-1}(\tau - h - J^T E_f^T u_2) - \dot{J}\dot{q}) + \dot{E}J\dot{q} \tag{6.26}$$

を得る。この式は τ について一意に解けて、

$$\tau = D\left\{ JE^{-1}\left(\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} u_1 - \dot{E}J\dot{q} \right) + h + J^T E_f^T u_2 \right\} \tag{6.27}$$

となる。

次に、この入力が十分であることを示す。この入力を (6.23) に代入して、整理すると

$$\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{x}_p = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + EJD^{-1}J^T E_f^T (u_2 - \lambda) \tag{6.28}$$

を得る。この式に左から、$[0 \quad I]$ を掛けると、

$$0 = E_f J D^{-1} J^T E_f^T (u_2 - \lambda) \tag{6.29}$$

となり、E_f が行フルランクであるから、$E_f J D^{-1} J^T E_f^T$ は正則となり、結局 $u_2 = \lambda$ となる。さらに、この関係を (6.28) に代入すると、$\ddot{x}_p = u_1$ を得る。従って、位置 x_p の目標値を x_d, その偏差を $e_p := x_p - x_d$ とし、力 λ の目標値を λ_d, その偏差を $e_f := \lambda - \lambda_d$ とすると、

$$u_1 = \ddot{x}_d - K_1 e_p - K_2 \dot{e}_p, \quad K_1 > 0, \ K_2 > 0 \tag{6.30}$$

$$u_2 = \lambda_d - K_3 \int_0^t e_f(\tau) d\tau, \quad K_3 > 0 \tag{6.31}$$

とすれば良いことが分かる。